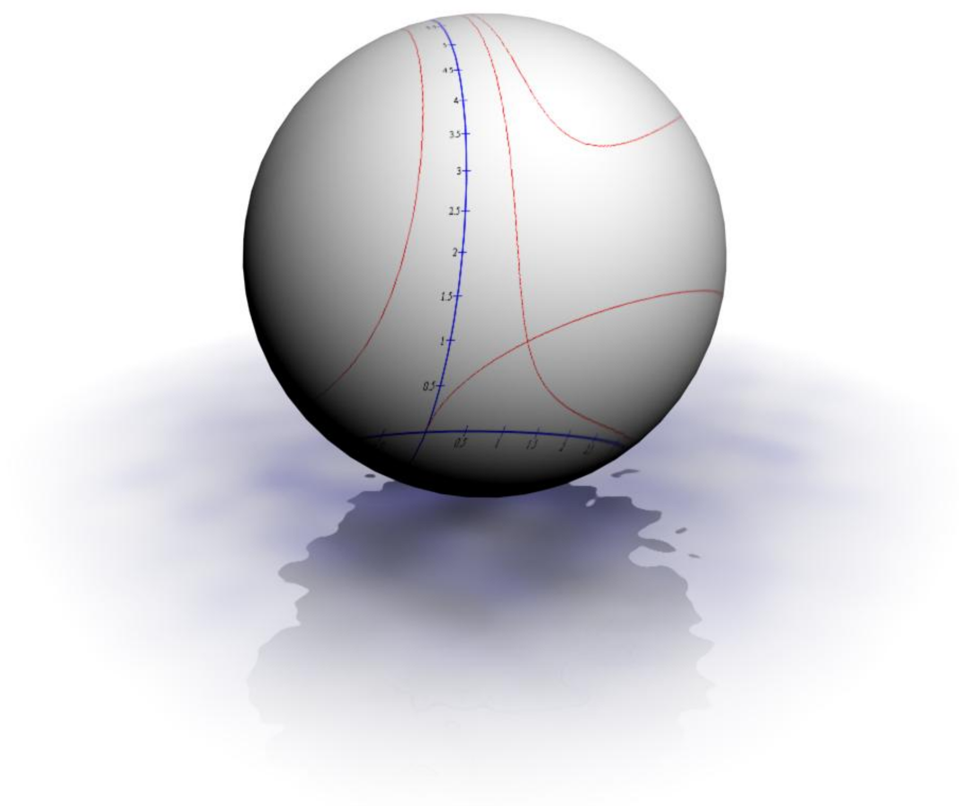


Analízis I.

Kidolgozta: Ábrahám Róbert
Dr. Szili László előadásai alapján

2010. július 10.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

A valós számok struktúrája

Megjegyzések:

- *A számfogalom fejlődése (AF/40. oldal);*
- *Bevezetés a matematikába: „felépítették” $\mathbb{R}$-et; mi most csak felsoroljuk az $\mathbb{R}$ meghatározó tulajdonságait.*

1.1. Az $\mathbb{R}$ Dedekind-féle axiómarendszere (1872):

Elfogadjuk, hogy létezik $\mathbb{R}$-rel jelölt halmaz, amire:

I. Testaxiómák:

I/1: $\exists\mathbb{R}$-en összeadás:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire:

- Kommutatív: $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x + y = y + x$
- Asszociatív: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ (x + y) + z = x + (y + z)$
- $\exists$ nullelem: $\exists 0 \in \mathbb{R}:\ \forall x \in \mathbb{R}:\ x + 0 = x$
- $\exists$ ellentett: $\forall x \in \mathbb{R}:\ \exists (-x) \in \mathbb{R}:\ x + (-x) = 0.$

I/2: $\exists\mathbb{R}$-en szorzás:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire:

- Kommutatív: $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x \cdot y = y \cdot x$
- Asszociatív: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- $\exists$ egységelem: $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}:\ \forall x \in \mathbb{R}:\ 1 \cdot x = x$
- $\exists$ reciprok: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}:\ \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}:\ x \cdot \frac{1}{x} = 1$

I/3: Disztributivitás:

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$

II. Rendezési axiómák:

II/1: $\exists\mathbb{R}$-en egy $\leq$ lineáris rendezési reláció, azaz:

- Rendezési reláció: $\begin{cases} x \leq x \ (\forall x \in \mathbb{R}) & (reflexív) \\ x \leq y \; és \; y \leq x \implies x = y & (antiszimmetrikus) \\ x \leq y \; és \; y \leq z \implies x \leq z & (tranzitív) \end{cases}$
- Lineáris: $\{\forall x, y \in \mathbb{R} : \; x \leq y \; vagy \; y \leq x$ (bármely két elem összehasonlítható; trichotóm: $x < y \; vagy \; x = y \; vagy \; x > y$)

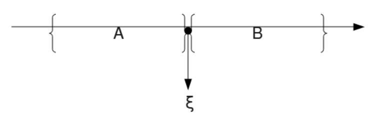
II/2: A műveletek és a $\leq$ kapcsolata:

- Ha $x, y \in \mathbb{R} \; és \; x \leq y$, akkor $\forall z \in \mathbb{R} : \; x + z \leq y + z$;
- Ha $x, y \in \mathbb{R} \; és \; x \leq y$, akkor $\forall z \geq 0 : \; x \cdot z \leq y \cdot z$.

III. Teljességi axióma (vagy Dedekind-féle, vagy szétválasztási axióma):

$Ha \; A, B \subset \mathbb{R}, \; A \neq \emptyset, \; B \neq \emptyset, \; \forall a \in A \; és \; \forall b \in B : \; a \leq b$, akkor $\exists \xi \in \mathbb{R} : \; a \leq \xi \leq b \; (\forall a \in A, \; \forall b \in B)$,

ahol ξ-t **szétválasztó elem**nek nevezzük (1.1. ábra).



1.1. ábra. szétválasztó elem (ξ)

Röviden: $\mathbb{R}$ egy lineárisan rendezett, teljes test.

1.2. $\mathbb{R}$ részhalmazai:

1.2.1. Természetes számok halmaza:

1.1. definíció. Induktív halmaz:

A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz induktív halmaza, ha:

- $0 \in H$
- $x \in H \implies x + 1 \in H$

1.1. tétel. Induktív halmazok tulajdonságai:

1. $\mathbb{R}$ induktív halmaz;
2. Akárhány induktív halmaz metszete is induktív halmaz.

1.2. definíció. Természetes számok halmaza:

$\mathbb{N} := \bigcap\limits_{\substack{H \subset \mathbb{R} \\ H \; induktív}} H$; azaz $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz. Ekkor $\mathbb{N}$-et a természetes számok halmazának nevezzük.

Megjegyzés: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

1.2. tétel. Teljes indukció:

Tegyük fel, hogy $A(n)$ egy állítás $\forall n \in \mathbb{N}$-re, és:

1. $A(0) = igaz$;
2. Ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz.

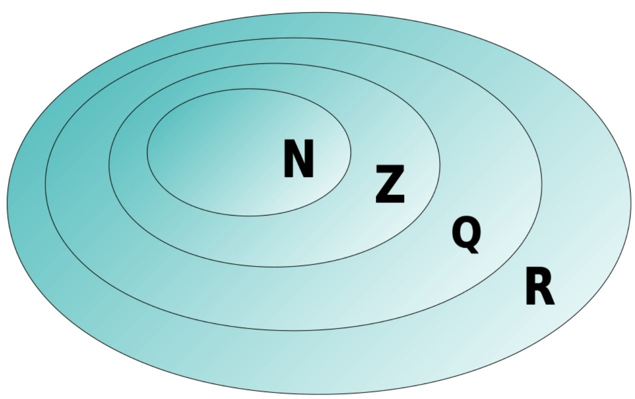
Ekkor $A(n)$ minden n-re igaz.

Bizonyítás. Legyen $S := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) = igaz\} \subset \mathbb{N}$ (jelölés). De: $0 \in S$, *ha* $n \in S \implies n+1 \in S$, vagyis S egy induktív halmaz, tehát - mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz - $\mathbb{N} \subset S \implies \mathbb{N} = S$. ☐

1.2.2. További részhalmazok:

- Egész számok halmaza ($\mathbb{Z}$)
- Racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$)
- Irracionális számok halmaza ($\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
- Valós számok halmaza ($\mathbb{R}$)

Mindezt az 1.2. ábrán foglaltuk össze:



1.2. ábra. további részhalmazok

1.3. A teljességi axióma következményei:

1.3.1. Szuprémum-elv:

Ehhez szükségünk van a maximum és a minimum definíciójára.

1.3. definíció. Maximum [minimum]:

$\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak van maximuma [minimuma], ha $\exists \alpha \in H : \forall x \in H : x \leq \alpha \ [\alpha \leq x]$.
Jele: $\max H := \alpha$; a H maximális eleme
[$\min H := \alpha$; a H minimális eleme].

Példa:

$H := \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\right\}$ itt van minimum (0), de nincs maximum.

$\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak nincs maximuma $\Longleftrightarrow \forall \alpha \in H : \exists x \in H : x > \alpha$, azaz minden H-beli elemnél van nagyobb H-beli elem. Hasonló állítás érvényes, ha a H halmaznak nincs minimuma.

1.4. definíció. Felülről [alulról] vett korlátosság:

$\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről korlátos (f.k.), ha $\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in H : x \leq K$. Hasonlóan definiáljuk az alulról vett korlátosságot.

1.5. definíció. Korlátosság:

A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

1.3. tétel. Felső [alsó] korlátok tulajdonságai:

1. Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos és K felső korlát, akkor $\forall K' > K$ is felső korlát;
2. A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ korlátos $\Longleftrightarrow \exists K \geq 0 : |x| \leq K \ (\forall x \in H)$.

1.4. tétel. Szuprémum-elv:

Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor H felső korlátjai között van legkisebb, azaz:

$\exists \min \{K \in \mathbb{R} \mid K\ felső\ korlát\ (f.k.)\}$.

Bizonyítás. Adott: $H \neq \emptyset$ felső korlát halmaz. $A := H$, $B := \{K \in \mathbb{R} \mid K\ felső\ korlátja\ H - nak\}$. Ekkor $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$: $\forall a \in A\ és\ \forall K \in B : a \leq K \implies \exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq K$ $(\forall a \in A, \forall K \in B)$ (a teljességi axióma szerint). Ez a ξ a legkisebb felső korlát, ugyanis:

- $\forall x \in H : x \leq \xi\ (\xi\ felső\ korlát)$
- Legkisebb is, mivel $\forall K \in B : K \geq \xi$.

□

1.5. tétel. Legnagyobb alsó korlát:

Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos. Ekkor a H alsó korlátjai között van legnagyobb.

1.6. definíció. Szuprémum, infimum:

- A legkisebb felső korlátot a H szuprémumának nevezzük, és $\sup H$-val jelöljük;
- A legnagyobb alsó korlátot a H infimumának nevezzük, és $\inf H$-val jelöljük.

1.7. definíció. Kibővített valós számok halmaza:

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{^{+}\infty, {}^{-}\infty\}$

Rendezés:
$\forall x \in \mathbb{R} : {}^{-}\infty < x <^{+} \infty$

1.8. definíció. Felső [alsó] korlátok hiánya:

1. Ha H felülről nem korlátos, akkor $\sup H :=^{+} \infty$;
2. Ha H alulról nem korlátos, akkor $\inf H :=^{-} \infty$.

Megjegyzés:

Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor:

- $\max H$ vagy van, vagy nincs;
- $\sup H$ mindig létezik.

1.6. tétel. Szuprémum [infimum] létezése:

Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$. Ekkor:

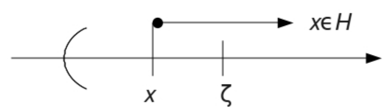
1. $\exists \max H \iff \sup H \in H$. Ekkor $\max H = \sup H$;
2. $\exists \min H \iff \inf H \in H$. Ekkor $\inf H = \min H$.

Megjegyzés:

$$\sup H \begin{cases} \in H & (pl.:\ H = \{\sin\alpha \mid \alpha \in\,]^-\infty,\ ^+\infty[\}) \\ \notin H & \left(pl.:\ H = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\right\}\right) \end{cases}$$

1.7. tétel. Felső korlát és szuprémum kapcsolata:

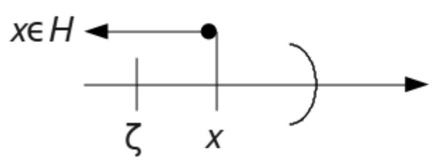
Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor $\xi = \sup H \iff \begin{cases} \forall x \in H:\ x \leq \xi\ (\xi\ felső\ korlát) \\ \xi\ a\ legkisebb\ felső\ korlát \end{cases}$ (1.3. ábra).
Így $\forall \varepsilon > 0:\ \exists x \in H:\ \xi - \varepsilon < x \leq \xi$.



1.3. ábra. legkisebb felső korlát

1.8. tétel. Alsó korlát és infimum kapcsolata:

Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos. Ekkor $\xi = \inf H \iff \forall x \in H:\ \xi \leq x$ (1.4. ábra).
Így $\forall \varepsilon > 0:\ \exists x \in H:\ \xi \leq x < \xi + \varepsilon$.



1.4. ábra. legnagyobb alsó korlát

1.9. tétel. Teljességi axióma és szuprémum-elv kapcsolata:

A teljességi axióma $\iff$ a szuprémum-elv.

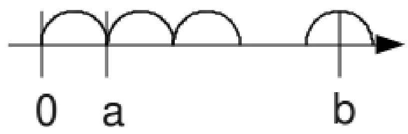
Bizonyítás. Ehhez a tételhez nem tartozik részletes bizonyítás.

$\Longrightarrow$: Láttuk;
$\Longleftarrow$: Nem bizonyítjuk.

□

1.3.2. Arkhimédeszi tulajdonság:

$\forall a > 0\ és\ \forall b \in \mathbb{R}:\ \exists n \in \mathbb{N}:\ b < na$



1.5. ábra. arkhimédeszi tulajdonság

Szemléletes jelentése:

$b < a\surd$; $a < b$ (1.5. ábra).

Bizonyítás. Indirekt: tegyük fel, hogy $\exists a > 0$ *és* $\exists b \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: b \geq na$. Legyen $H := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor $H \neq \emptyset$ és felülről korlátos (pl.: b egy felső korlát), emiatt $\exists \sup H =: \xi$. ξ legkisebb felső korlátja H-nak, így $\xi - a$ nem felső korlát, azaz $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 a > \xi - a \implies (n_0+1)a > \xi$, ez pedig ellentmondás, ugyanis a ξ felső korlát. □

Következmények:

1. $\forall \varepsilon > 0: \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$ (ugyanis $a = \varepsilon$, $b = 1$);
2. $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos halmaz, azaz $\forall K \in \mathbb{R}: \exists n \in \mathbb{N}: n > K$ ($a = 1$, $b = K$);
3. Ha $K \subset \mathbb{N}$, $K \neq \emptyset$, akkor K-nak van minimuma.

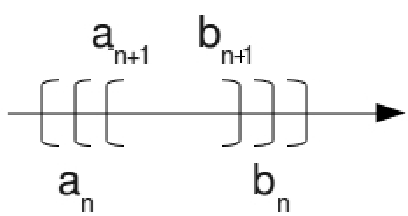
Bizonyítás. Érdeklődőknek. □

1.3.3. Cantor-tulajdonság:

Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Ekkor $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Megjegyzés:

Egymásba skatulyázott intervallumok (1.6. ábra).



1.6. ábra. egymásba skatulyázott intervallumok

Bizonyítás. (Teljességi axióma szerint) legyen $A := \{a_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B := \{b_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ *és* $a_n \leq b_m$ $(\forall n, m \in \mathbb{N})$, ugyanis:

1. Ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$;
2. Ha $n > m$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Így a teljességi axióma feltételei teljesülnek, emiatt pedig $\exists \xi \in \mathbb{R}: a_n \leq \xi \leq b_m$ $(\forall n, m \in \mathbb{N})$, ezért $a_n \leq \xi \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \implies \xi \in [a_n, b_n]$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \implies \xi \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \implies \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. □

Megjegyzés:

A feltételek lényegesek!

Ha az intervallumok nem zártak, akkor $\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(0,\ \frac{1}{n}\right)=\emptyset$.

Ha az intervallumok nem korlátosak, akkor $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[n,\ {}^{+}\infty\right)=\emptyset$.

1.10. tétel. Teljességi axióma, arkhimédeszi tulajdonság és Cantor-tulajdonság kapcsolata:

Teljességi axióma $\Longleftrightarrow$ arkhimédeszi+Cantor-tulajdonság.

Bizonyítás. Ehhez a tételhez nem tartozik részletes bizonyítás.

$\Longrightarrow$: Láttuk;
$\Longleftarrow$: Nem bizonyítjuk.

□

Megjegyzések:

- *Teljességi axióma $\Longleftrightarrow$ a szuprémum-elv $\Longleftrightarrow$ arkhimédeszi+Cantor-tulajdonság.*
- *(1872; bármelyik lehetne axióma).*

2. fejezet

Függvények és relációk

2.1. Rendezett pár:

Legyen a,b tetszőleges „dolog”.

2.1. definíció. (Szemléletes):

- (a,b), ahol a az első, b a második komponens;
- Meghatározó tulajdonsága: $(a,b) = (x,y) \iff a = x \text{ és } b = y$.

2.2. definíció. (Halmazelméleti):

Legyen a és b két halmaz. Ekkor $(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$.

2.3. definíció. Descartes-szorzat:

Legyen $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ két halmaz. Ekkor a két halmaz Descartes-szorzatán az $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ (A „kereszt” B) halmazt értjük.

2.4. definíció. Reláció:

Az $r \subset A \neq \emptyset \times B \neq \emptyset$ halmazt relációnak nevezzük. A relációnak két fontos összetevőjét különböztetjük meg:

1. A $D_r := \{a \in A \mid \exists b \in B : (a,b) \in r\}$ halmazt a reláció értelmezési tartományának (É.T.) nevezzük;
2. Az $R_r := \{b \in B \mid \exists a \in A : (a,b) \in r\}$ halmazt a reláció értékkészletének (É.K.) nevezzük.

2.2. Függvények:

2.5. definíció. Függvény:

Legyen $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ két halmaz. Az $f \subset A \times B$ relációt függvénynek nevezzük, ha $\forall x \in D_f : \exists! y \in B : (x,y) \in f$. Az $f(x) := y$ számot az f függvény x-helyen vett helyettesítési értékének nevezzük (f az x-hez az $y = f(x)$ elemet rendeli).

Megjegyzés:

Vessük össze ezt a definíciót a középiskolában tanult függvény-fogalommal!

Jelölések:

- $f : A \to B : \begin{cases} f \subset A \times B & (\textit{függvény}) \\ D_f = A & (\textit{értelmezési tartomány}) \end{cases}$ (f az A halmazból B-be képező függvény);
- $f \in A \to B : \begin{cases} f \subset A \times B & (\textit{függvény}) \\ D_f \subset A & (\textit{értelmezési tartomány}) \end{cases}$ (f az A-ból B-be képező függvény).

2.2.1. Függvények megadása:

1. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, például: $x \to x^2$;
2. $f(x) := x^2\ (x \in \mathbb{R})$.

2.6. definíció. Halmaz képe, őseképe:

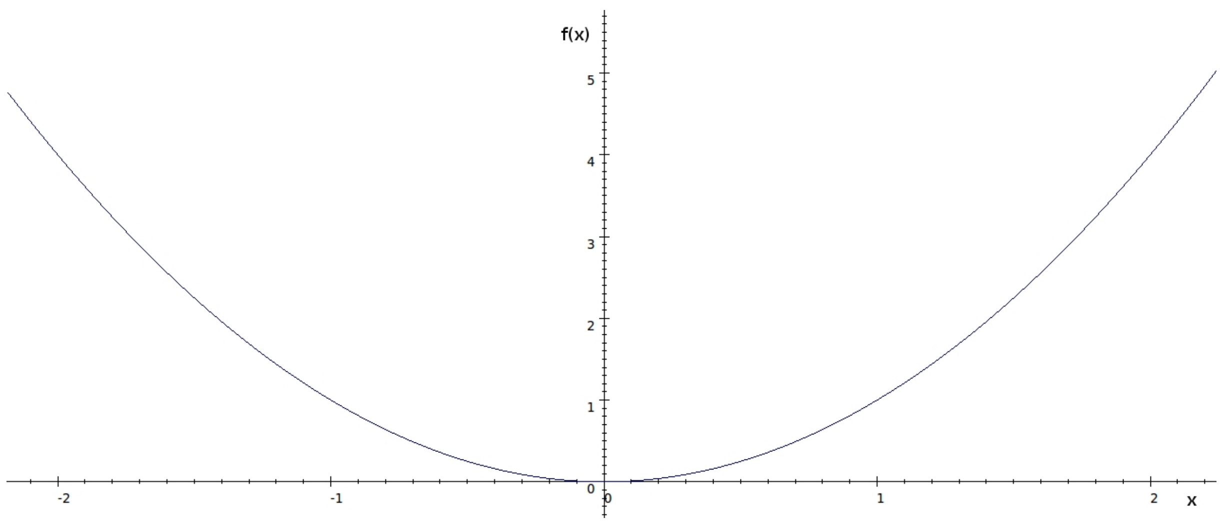
Legyen $f:\ A \to B$. Továbbá legyenek:

1. $C \subset A:\ f[C] := \{f(x) \in B \mid x \in C\}$;
2. $D \subset B:\ f^{-1}[D] := \{x \in A \mid f(x) \in D\}$.

Ekkor az $f[C]$ halmazt a C halmaz f függvény által létesített képének, az $f^{-1}[D]$ halmazt pedig a D halmaz f függvény által létesített ősképének nevezzük.

Példa:

$f(x) = x^2\ (x \in \mathbb{R})$ esetén $f[[0,2]] = [0,4]$, $f^{-1}[[1,4]] = [-2,-1] \cup [1,2]$ (2.1. ábra).



2.1. ábra. az $f(x) = x^2$ függvény

Megjegyzés:

Az igazolás meggondolandó.

2.2.2. Függvények invertálhatósága:

A függvények invertálhatósága egyváltozós művelet.

2.7. definíció. Invertálhatóság:

Az $f:\ A \to B$ függvény invertálható (vagy injektív), ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző értékkészletbeli elemeket rendel, azaz: $\forall x, y \in D_f,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ (2.2. ábra).

A nem-invertálható függvények szemléltetése a 2.3. ábrán látható.

2.1. tétel. Injektivitás:

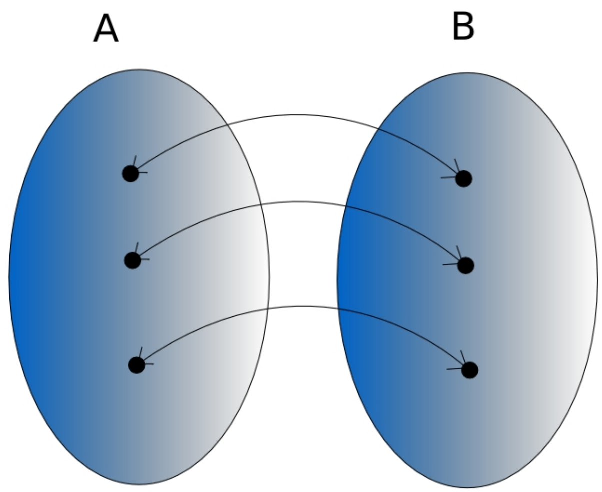
$f:\ A \to B\ \mathit{injektív} \iff \forall x, y \in D_f,\ f(x) = f(y)\ \Rightarrow\ x = y.$

2.8. definíció. Függvény inverze:

Tegyük fel, hogy $f:\ A \to B$ függvény injektív, azaz $\forall y \in R_f:\ \exists! x \in D_f:\ f(x) = y$. Ekkor az $f^{-1}:\ R_f \to D_f\ (y \to x)$ függvényt az f függvény inverzének nevezzük.

Megjegyzés:

$D_{f^{-1}} = R_f,\ R_{f^{-1}} = D_f.$



2.2. ábra. invertálható f függvény

2.9. definíció. Bijekció:

Az $f: A \to B$ függvény az A és B halmazok közötti bijekció, ha:

1. f injektív;
2. $R_f = B$.

2.2.3. Függvények kompozíciója:

A függvények kompozíciója kétváltozós művelet. Ha $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \neq \emptyset$, akkor lépezhető a kompozíció (2.4. ábra).

2.10. definíció. Függvények kompozíciója:

Legyen $f: A \to B$, $g: C \to D$, és tegyük fel, hogy $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \neq \emptyset$. Ekkor az $f \circ g$ (f "*kör*" g) : $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \to B: (f \circ g)(x) := f(g(x))$ függvényt az f és g függvények kompozíciójának (vagy összetett függvényének) nevezzük.

Példa:

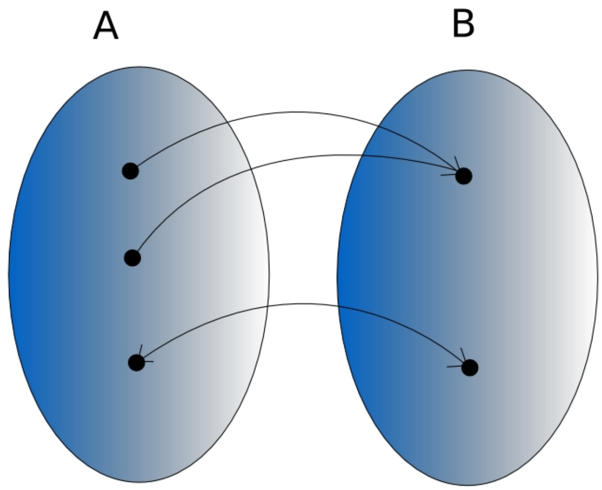
Legyen $f(x) := \sqrt{1-x},\ (x \leq 1),\ g(u) := u^2\ (u \in \mathbb{R})$. Ekkor:

- $(f \circ g)(u) := \sqrt{1-u^2}\ (|u| \leq 1)$;
- $(g \circ f)(x) := 1 - x\ (x \leq 1)$.

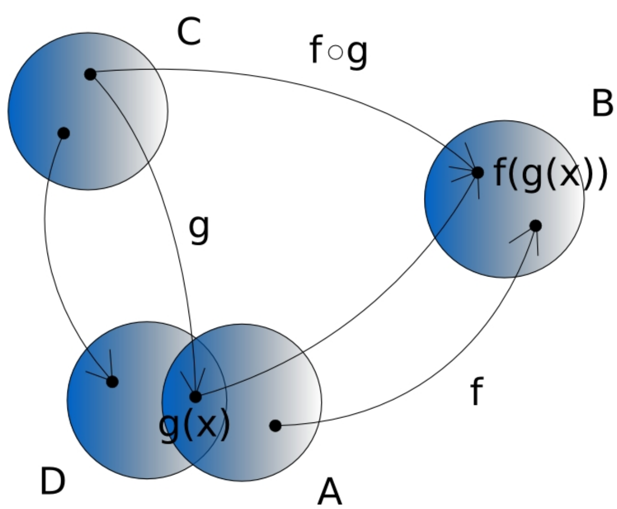
A két függvényt a 2.5. ábrán láthatjuk.

Az ábrán jól látható, hogy a függvények kompozíciójának képzése nem kommutatív művelet ($f \circ g \neq g \circ f$), tehát fontos a sorrend!

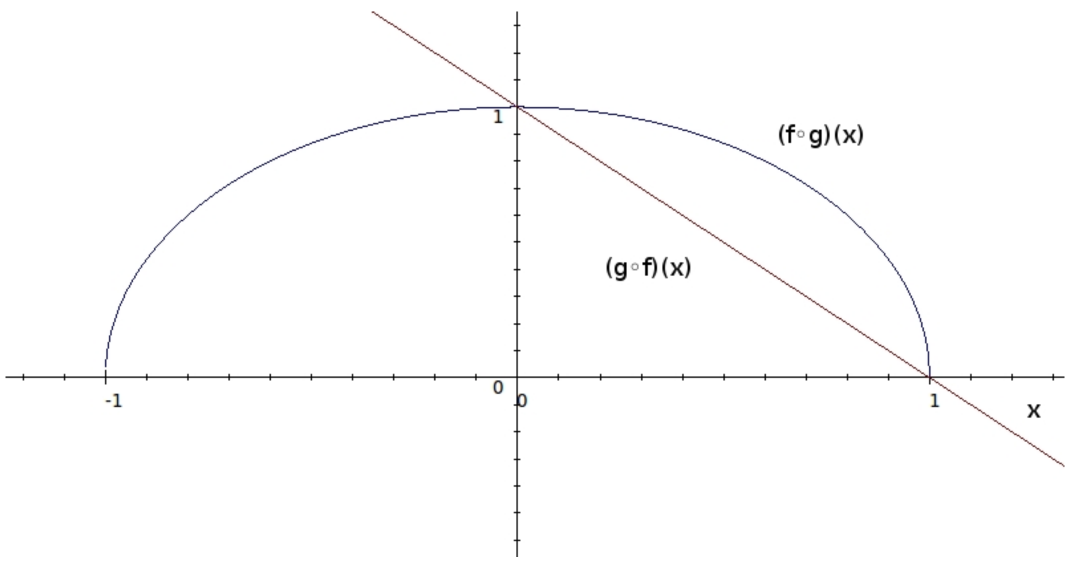
Az Analízis feladata a különféle függvények jellemzése, tulajdonságainak leírása.



2.3. ábra. nem-invertálható f függvény



2.4. ábra. függvények kompozíciója



2.5. ábra. az f és g függvények kétféle kompozíciója

3. fejezet

Valós sorozatok

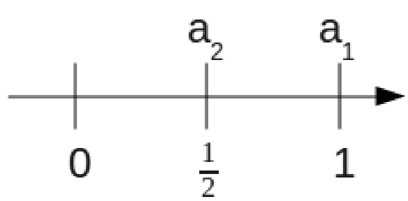
Most speciális függvényeket, sorozatokat fogunk vizsgálni.

3.1. definíció. Valós sorozat:

Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt valós sorozatnak nevezzük ($D_a = \mathbb{N}$). Az $a(n) := a_n$ számot a sorozat n-edik tagjának nevezzük, ahol n az n-edik tag indexe.

Szemléltetés:

Például legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Az így kapott sorozatot a 3.1. ábrán szemléltetjük.



3.1. ábra. az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat

Megjegyzés:

A sorozat kezdőtagját tetszőleges elemtől kezdődően lehet indexelni, azaz: $r \in \mathbb{Z}$ rögzített: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq r\} \to \mathbb{R}$ függvényt is sorozatnak tekintjük.

3.1. Sorozat megadása:

A sorozatok megadása háromféleképpen történhet:

1. Indexek tranzformációjával (pl.: $a_n := 3n^2 + 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$);
2. Eset-szétválasztással $\left(pl.:\ a_n := \begin{cases} 2n^2, & ha\, n = 0, 2, 4, \ldots \\ -n, & ha\, n = 1, 3, \ldots \end{cases} \right)$;
3. Rekurzív módon (pl.: $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ n = 2, 3, \ldots$; Fibonacci-sorozat).

3.2. Példák sorozatokra:

3.2.1. Számtani sorozat:

$\alpha, d \in \mathbb{R}: \ a_n := \alpha + nd \ (n \in \mathbb{N})$

Rekurzív módon:

$a_0 = \alpha; \ a_{n+1} = a_n + d \ (n \in \mathbb{N})$

3.2.2. Mértani (vagy geometriai) sorozat:

$\alpha, q \in \mathbb{R}: \ a_n := \alpha \cdot q^n \ (n \in \mathbb{N})$

Rekurzív módon:

$a_0 := \alpha; \ a_{n+1} := q \cdot a_n \ (n \in \mathbb{N})$

3.2.3. Harmonikus sorozat:

$a_n := \frac{1}{n} \ (n = 1, 2, \ldots)$

3.3. Műveletek:

$a = (a_n), \ b = (b_n)$:

- $a + b := (a_n + b_n)$;
- $\lambda a := (\lambda a_n) \ (\lambda \in \mathbb{R})$;
- $a \cdot b := (a_n \cdot b_n)$;
- Ha $0 \notin R_b$, akkor $\frac{a}{b} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

3.4. Elemi tulajdonságok:

3.2. definíció. Korlátosság:

Az $a = (a_n)$ sorozat:

1. felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}: \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq K$,
2. alulról korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R}: \ \forall n \in \mathbb{N}: \ k \leq a_n$,
3. korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

3.1. tétel. Sorozat korlátossága:

Az (a_n) sorozat korlátos $\iff \exists K \in \mathbb{R}: \ \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq K$.

3.3. definíció. Monotonitás:

Az (a_n) sorozat:

1. monoton növekvő ($\nearrow$), ha $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq a_{n+1}$,
2. szigorúan monoton növekvő ($\uparrow$), ha $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$,
3. monoton csökkenő ($\searrow$), ha $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} \leq a_n$,
4. szigorúan monoton csökkenő ($\downarrow$), ha $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} < a_n$,
5. monoton, ha teljesül valamelyik az előző 4 feltétel közül.

4. fejezet

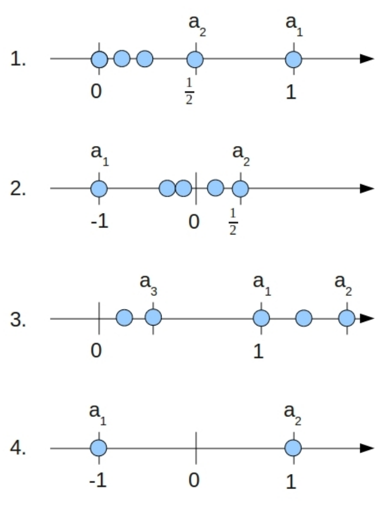
Konvergencia, határérték

Az Analízis alapvető fogalmai

4.1. Motiváló példák:

1. $a_n := \frac{1}{n}$;
2. $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$;
3. $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & |n \, páratlan \\ 1 + \frac{1}{n} & |n \, páros \end{cases}$;
4. $a_n := (-1)^n$.

Az 1-2. pontban mutatott példákat első-, a 3-4. pontban látottakat pedig második „sűrűsödési” helynek nevezzük. Mindezt a 4.1. ábrán szemléltetjük.



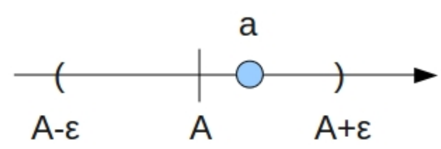
4.1. ábra. Motiváló példák

4.2. Konvergencia:

Lényegében az első sűrűsödési hely megnevezésekor beszélhetünk konvergenciáról.

4.1. definíció. ε-sugarú környezet:

$A \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$: $k_\varepsilon(A) := (A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$ az A szám ε-sugarú környezete (4.2. ábra).



4.2. ábra. az A szám ε-sugarú környezete

Megjegyzés:

$a \in k_\varepsilon(A) \iff |a - A| < \varepsilon$

4.2. definíció. Konvergens sorozat:

Az (a_n) sorozat konvergens, ha $\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : |a_n - A| < \varepsilon$.

Megjegyzés:

Az A minden $\varepsilon > 0$ környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

4.3. Határérték:

4.1. tétel. Határérték:

Ha (a_n) konvergens, akkor a definícióbeli A szám egyértelmű, és ezt a számot a sorozat határértékének nevezzük (azt is mondjuk, hogy (a_n) A-hoz tart). Jelölése: $\lim(a_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ vagy $a_n \to A\ (n \to^+ \infty)$.

Bizonyítás. Indirekt: tegyük fel, hogy $A_1 \neq A_2$, és az előző definíció (4.2) teljesül.
Ekkor $0 < \varepsilon < \frac{|A_1 - A_2|}{2}$: $\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : & |a_n - A_1| < \varepsilon \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : & |a_n - A_2| < \varepsilon \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$. Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, ekkor $\forall n \geq n_0 : 0 < |A_1 - A_2| = |(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)| \leq |A_1 - a_n| + |a_n - A_2| < 2\varepsilon < |A_1 - A_2|$, ez pedig ellentmondás. $\square$

4.2. tétel. Sorozat határértékének meghatározása:

$\lim(a_n) = A \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : & |a_n - A| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} | a_n \notin k_\varepsilon(A)\}\ \textit{véges} & * \end{cases}$ (*azaz A minden környezetén kívül a sorozatnak véges sok tagja van.)

Megjegyzés:

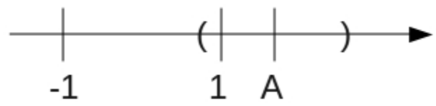
Pongyolán: $\lim(a_n) = A$ a sorozat „nagy indexű” tagjai A-hoz „közel” vannak.

4.3. definíció. Divergens sorozat:

Az (a_n) sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz (a 4.2-es definíció feltételei nem teljesülnek): $\forall A \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : |a_n - A| \geq \varepsilon \iff a_n \notin k_\varepsilon(A)$.

Fontos példa:

$((-1)^n)$ divergens, ugyanis $\forall A \in \mathbb{R}$-hez az $\varepsilon > 0$ megválasztható úgy, hogy $-1\ \textit{vagy}\ 1 \notin k_\varepsilon(A)$ (4.3. ábra).



4.3. ábra. divergens sorozat

4.3.1. Kitüntetett divergens sorozatok:

Például: $a_n := n$ vagy $a_n := -n$.

4.4. definíció. Végtelen határérték:

1. Az (a_n) sorozat határértéke: ${}^{+}\infty$ (jelölés: $\lim(a_n) = {}^{+}\infty$), ha $\forall P \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ (n \in \mathbb{N}) : a_n > P$;
2. Az (a_n) sorozat határértéke: ${}^{-}\infty$ (jelölés: $\lim(a_n) = {}^{-}\infty$), ha $\forall p \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ (n \in \mathbb{N}) : a_n < p$.

Példák:

- $\lim(n^2) = {}^{+}\infty$;
- $\lim(-n^2) = {}^{-}\infty$.

4.5. definíció. Végtelen ε-sugarú környezete:

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor:

1. $k_\varepsilon({}^{+}\infty) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, {}^{+}\infty\right)$;
2. $k_\varepsilon({}^{-}\infty) := \left({}^{-}\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Ezt a ${}^{\pm}\infty$ ε-sugarú környezetének nevezzük.

Megjegyzések:

- *A határérték - azaz $A \in \overline{\mathbb{R}}$ - egyértelmű;*
- *Sorozatok konvergencia tulajdonságainak összefoglalása: 4.1. táblázat.*

Konvergens sorozatok	**Divergens sorozatok**	
Határérték: $A \in \mathbb{R}$	Határérték: ${}^{\pm}\infty$	Oszcillálva divergensek (pl.: $a_n := (-1)^n$)
Van határérték		Nincs határérték

4.1. táblázat. sorozatok konvergenciája

Jelölések:

1. $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$ (azaz véges a határérték és a sorozat konvergens);
2. $\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ (azaz (a_n)-nek létezik határértéke).

Átnézendő: AF|142-149. feladatok!

4.3.2. A határérték definíciójának egyszerű következményei:

4.3. tétel. Hasonló sorozatok határértéke:

Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n)-re $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ (n \in \mathbb{N}) : a_n = b_n$. Ekkor (a_n)-nek létezik határértéke $\Longleftrightarrow$ (b_n)-nek létezik határértéke, és ekkor $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

Bizonyítás. A definícióból következik. □

Megjegyzés:

Véges sok tag nem befolyásolja a sorozat határértékét.

4.4. tétel. A konvergencia egy szükséges feltétele:

Ha (a_n) konvergens, akkor korlátos is (véges a határérték).

Bizonyítás. $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$ (véges). Ekkor az A ε-sugarú környezetén kívül véges sok tag van, és $\varepsilon = 1 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : |a_n - A| < 1$. □

4.4. Részsorozatok:

4.6. definíció. Részsorozat:

Legyen $a = (a_n)$ tetszőleges sorozat és $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan növekvő indexsorozat. Ekkor az $a \circ \nu = (a_{\nu_n})$ sorozat az (a_n)-nek a ν által meghatározott részsorozata.

Megjegyzés:

$D = \mathbb{N}$, *azaz* $(a \circ \nu)$ *valóban sorozat.*

4.5. tétel. Részsorozatok határértéke:

Ha az (a_n) sorozatnak létezik határértéke, akkor tetszőleges ν indexsorozat esetén az $(a \circ \nu)$ részsorozatnak is van határértéke, és $\lim(a \circ \nu) = \lim(a)$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor: $\{n | a_n \notin k_\varepsilon(A)\}$ véges, és $\forall \varepsilon > 0 : \{n | a_{\nu_n} \notin k_\varepsilon(A)\}$ is véges. Ebből pedig következik, hogy $\lim(a \circ \nu) = A$. □

Következmény:

Legyen $a = (a_n)$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $\exists \nu_1, \nu_2$ indexsorozat, melyekre: $\lim(a \circ \nu_1) \neq \lim(a \circ \nu_2)$. Ekkor $a = (a_n)$-nek nem létezik határértéke.

Bizonyítás. Indirekt.

Példa:

$a_n := ((-1)^n)$. Ekkor (a_n)-nek nincs határértéke, ugyanis:

- $a_{2n} = 1 \to 1\ (n \to^+ \infty)$;
- $a_{2n+1} = -1 \to -1\ (n \to^+ \infty)$.

□

4.5. A rendezés és a határérték kapcsolata:

4.6. tétel. Közrefogási elv [rendőr-elv]:

Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n), (c_n) sorozatokra teljesülnek az alábbiak:

- $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : \, a_n \leq b_n \leq c_n$;
- $\exists \lim(a_n) = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor $\exists \lim(b_n)$ és $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás. 1. $A \in \mathbb{R}$ véges:

- $(a_n) : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : \, A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;
- $(c_n) : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : \, A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$.

$\varepsilon > 0 : n_0 := \max\{n_1, n_2, N\}$ és $\forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : \, A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \implies b_n \in k_\varepsilon(A) \implies \lim(b_n) = A$.

2. $A =^+ \infty$:

Tekintsük (a_n) sorozatot: $\lim(a_n) =^+ \infty \implies \forall P \in \mathbb{R} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : \, a_n > P$. Legyen $n_0 := \max\{n_1, N\}$. Ekkor $\forall n \geq n_0 : \, b_n \geq a_n > P \implies \lim(b_n) =^+ \infty$.

3. $A =^- \infty$:

Tekintsük (c_n) sorozatot: $\lim(c_n) =^- \infty \implies \forall p \in \mathbb{R} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : \, c_n < p$. Legyen $n_0 := \max\{n_1, N\}$. Ekkor $\forall n \geq n_0 : \, p > c_n \geq b_n \implies \lim(b_n) =^- \infty$. □

4.7. tétel. Két sorozat határértékeinek kapcsolata:

Tegyük fel, hogy $\exists \lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor:

1. Ha $A > B$, akkor $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : \, a_n > b_n$;
2. Ha $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : \, a_n \geq b_n$, akkor $A \geq B$.

Megjegyzések:

1. *A két állítás **majdnem** egymás megfordításai;*
2. *A megfordítások nem igazak, azaz:*
   (a) $a_n > b_n \neg\!\!\implies A > B$ *(például: legyen* $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{2n}$*);*
   (b) $A \geq B \neg\!\!\implies a_n \geq b_n$ *(például: legyen* $a_n = \frac{1}{2n}$, $b_n = \frac{1}{n}$*).*

Bizonyítás. 1. (a) $A, B \in \mathbb{R}$ *végesek:* $0 < \varepsilon < \frac{|A-B|}{2}$:

- $(a_n) : \, (\varepsilon > 0 :) \, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : \, A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;
- $(b_n) : \, (\varepsilon > 0 :) \, \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : \, B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon$.

Ebből pedig az következik, hogy $\forall n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\} : \, b_n < B + \varepsilon < A - \varepsilon < a_n$.

(b) $A =^+ \infty$, $B \in \mathbb{R}$:

- $(b_n) : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : \, B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon$;
- $(a_n) : \, \lim(a_n) =^+ \infty \implies P = B + \varepsilon, \, \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : \, a_n > B + \varepsilon$.

Ebből pedig az következik, hogy $\forall n \geq N := \max\{n_1, n_2\} : \, a_n > B + \varepsilon > b_n$.

(c) $A =^+ \infty$, $B =^- \infty$:

- $(a_n) \longrightarrow {}^+\infty \implies \forall P \in \mathbb{R} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : \, a_n > P$;
- $(b_n) \longrightarrow {}^-\infty \implies P \in \mathbb{R} : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : \, b_n < P$.

Ebből pedig az következik, hogy $\forall n \geq N := \max\{n_1, n_2\} : \, a_n > P > b_n$.

(d) $A \in \mathbb{R}$, $B =^- \infty$:

- $(a_n) : \forall\varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1\ (n \in \mathbb{N}) : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;
- $(b_n) \longrightarrow {}^-\infty \implies P = A - \varepsilon : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2\ (n \in \mathbb{N}) : b_n < A - \varepsilon \implies \forall n \geq N := \max\{n_1, n_2\} : a_n > A - \varepsilon > b_n$.

2. Indirekt: tegyük fel, hogy $A < B \overset{1-es\ szerint}{\implies} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ (n \in \mathbb{N}) : a_n < b_n$, *ami ellentmondás.*

□

4.6. Műveletek konvergens sorozatokkal ($\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$):

4.6.1. Nullasorozatok:

4.7. definíció. Nullasorozat:

Az (a_n) nullasorozat, ha $\lim(a_n) = 0$, azaz: $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$.

4.8. tétel. Nullasorozatok tulajdonságai:

1. $\lim(a_n) = 0 \iff \lim(|a_n|) = 0$;
2. $\lim(a_n) = A \iff \lim(a_n - A) = 0$;
3. Ha (a_n) nullasorozat, és $|c_n| \leq |a_n| : \forall n \in \mathbb{N}$, akkor $\lim(c_n) = 0$.

Bizonyítás. Közvetlenül a definícióból. □

4.9. tétel. Műveletek nullasorozatokkal:

Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = 0$ és $\lim(b_n) = 0$. Ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ is nullasorozat;
2. Ha (c_n) korlátos, akkor $(a_n \cdot c_n)$ nullasorozat;
3. $(a_n b_n)$ nullasorozat.

Bizonyítás. 1-es bizonyítása:

- $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : (n \in \mathbb{N}) : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$;
- $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2\ (n \in \mathbb{N}) : |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ebből pedig az következik, hogy $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 := \max\{n_1, n_2\} : \forall n \geq n_0 (n \in \mathbb{N}) : |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ebből pedig következik továbbá, hogy $\lim(a_n + b_n) = 0$.

2-es bizonyítása:

- (c_n) *korlátos* $\implies \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \leq K\ (K > 0)$;
- $\lim(a_n) = 0 \implies \forall\varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1\ (n \in \mathbb{N}) : |a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$.

Ebből pedig az következik, hogy $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 := \max\{n_1, n_2\} : \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : |a_n c_n| \leq |a_n| \cdot |c_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$, amiből következik, hogy $\lim(a_n c_n) = 0$.

3-as bizonyítása:

$\lim(b_n) = 0 \implies (b_n)$ korlátos, amiből (2-es szerint) következik, hogy $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

Megjegyzés:

- *1-es különbségre is igaz:* $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0 \implies \lim(a_n - b_n) = 0$;
- *2-es hányadosra nem igaz: ha* $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$, *akkor* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *határérték szempontjából bármi lehet.*

□

Példák:

- $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0;$
- $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \to {}^{+}\infty.$

Kicsi számok hányadosa bármi lehet:

- $\frac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = c \to c\,(c \in \mathbb{R});$
- $\frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = -n \to {}^{-}\infty;$
- $\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n \nexists h.é.$

4.6.2. Műveletek konvergens sorozatokkal:

4.10. tétel. Műveletek konvergens sorozatokkal:
Tegyük fel, hogy $\exists \lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$, $\exists \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}$. Ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ is konvergens, és $\lim(a_n + b_n) = A + B$;
2. $(a_n b_n)$ is konvergens, és $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;
3. Ha még $0 \notin R_b$ és $B \neq 0$, akkor $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ konvergens, és $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$.

Bizonyítás. 1-es bizonyítása:

- $\lim(a_n) = A \iff \lim(a_n - A) = 0;$
- $\lim(b_n) = B \iff \lim(b_n - B) = 0.$

Ebből pedig az következik, hogy $[(a_n - A) + (b_n - B)] = [(a_n + b_n) - (A + B)]$.
Nullasorozat esetén: $\lim(a_n + b_n) = A + B$.
2-es bizonyítása:
Igazoljuk, hogy $(a_n b_n - AB)$ nullasorozat, ugyanis:

$$|a_n b_n - AB| \stackrel{TR\ddot{U}KK}{=} |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \leq$$

$$\underbrace{\underbrace{|b_n|}_{korl\acute{a}tos} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{nullasorozat} + \underbrace{|A|}_{korl\acute{a}tos} \underbrace{|b_n - B|}_{nullasorozat}}_{nullasorozat} \Longrightarrow (|a_n b_n - AB|)\ nullasorozat \Longrightarrow \lim(a_n b_n - AB) = 0$$

$\Longrightarrow \lim(a_n b_n) = AB.$

3-as bizonyítása:

4.11. tétel. (segédtétel):
Ha (b_n) konvergens, és $\lim(b_n) = B \neq 0$ $(0 \notin R_b)$, akkor $\left(\frac{1}{|b_n|}\right)$ korlátos.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $B > 0$, $\lim(b_n) = B$. Ekkor $\varepsilon = \frac{B}{2} = \frac{|B|}{2} > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b_n - B| < \frac{|B|}{2}$.
$|b_n| = |(b_n - B) + B| = |B - (B - b_n)| \geq |B| - |B - b_n| \geq |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}$ $\quad (||a| - |b|| \leq |a - b|)$. □

3-as bizonyítása (folytatás):
Igazoljuk, hogy $\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right)$ nullasorozat: $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|a_n B - Ab_n|}{|b_n B|} \stackrel{TR\ddot{U}KK}{=} \frac{|a_n B - AB + BA - Ab_n|}{|b_n B|} = \frac{|B(a_n - A) + A(B - b_n)|}{|b_n B|} \leq$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{korl\acute{a}tos} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{nullasorozat} + \underbrace{\frac{|A|}{|B|}}_{korl\acute{a}tos} \cdot \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{korl\acute{a}tos} \underbrace{|b_n - B|}_{nullasorozat}}_{nullasorozat} \Longrightarrow \left(\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right|\right)\ nullasorozat \Longrightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) = 0,\ \text{ebből}$$

pedig következik, hogy $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$. □

4.6.3. Nevezetes sorozatok:

1. Konstans sorozat: $\forall c \in \mathbb{R} : \lim(c) = c$;
2. $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, ugyanis: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ (archimédeszi tulajdonság) $\Longrightarrow \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Longrightarrow \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$;
3. $k = 1, 2, \ldots$:
   (a) $\lim\limits_{n \to ^+\infty}(n^k) = ^+\infty$;
   (b) $\lim\limits_{k \to ^+\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0$;
4. Mértani/geometriai sorozat:
   $q \in \mathbb{R}$, (q^n):
   $$\lim_{n \to ^+\infty}(q^n) = \begin{cases} 0, & ha\ |q| < 1 \\ 1, & ha\ q = 1 \\ ^+\infty, & ha\ q > 1 \\ \nexists, & ha\ q \leq -1 \end{cases}.$$
   Bizonyítás. $q = 1$ esetén az állítás triviális. $q > 1$ esetén $q = 1 + h\ (h > 0) : q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \geq nh$ (Bernoulli). Ekkor $\forall P \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : q^n \geq nh > P$, ha $n \geq n_0 = \left[\frac{P}{h}\right] + 1$, amiből következik, hogy $\lim\limits_{n \to ^+\infty}(q^n) = ^+\infty$. $|q| < 1$ esetén: ha $q = 0$, akkor az állítás triviális; ha $q \neq 0$, akkor $0 < |q^n| = \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} = \frac{1}{(1+h)^n} \overset{Bernoulli}{\leq} \frac{1}{|q|} > 1$, amiből az következik, hogy $\frac{1}{|q|} = 1 + h \leq \frac{1}{1+nh} \leq \underbrace{\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\ (h > 0)$. A közrefogási elv alapján ebből az következik, hogy $\lim(|q|^n) = \lim\limits_{n \to ^+\infty}(q^n) = 0$. $q \leq -1$ esetén: ha $q = -1$, akkor nem létezik határérték $((-1)^n)$; ha $q < -1$, akkor sem létezik határérték (páros indexű részsorozat esetén a sorozat $^+\infty$-hez tart, páratlan indexű részsorozat esetén pedig $^-\infty$-hez). □
5. $\lim\limits_{n \to ^+\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1\ (a > 0)$.
   Bizonyítás. $a = 1$ esetén az állítás triviális. $a > 1$ esetén $1 < \sqrt[n]{a} = 1 + h_n\ (h_n > 0)$. Ekkor $a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \Longrightarrow \underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ 0}} < h_n < \underbrace{\frac{a-1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \Longrightarrow \begin{cases} \lim(h_n) = 0 \\ \lim\limits_{n \to ^+\infty}(\sqrt[n]{a}) = \lim(1 + h_n) = 1 + \underbrace{\lim(h_n)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = 1 \end{cases}$. $0 < a < 1$ esetén: $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \underset{n \to ^+\infty}{\longrightarrow} 1\ \left(\frac{1}{a} > 1\right)$. □
6. $\lim\limits_{n \to ^+\infty}(\sqrt[n]{n}) = 1$.
   Bizonyítás. $1 < \sqrt[n]{n} = 1 + h_n\ (h_n > 0)$ (binomiális). Ekkor $n = (1 + h_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}h_n + \binom{n}{2}h_n^2 + \ldots + \binom{n}{n}h_n^n \geq \binom{n}{2}h_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}h_n^2$. Ebből következik, hogy $\underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ 0}} < \underbrace{h_n}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{2}{n+1}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\ (n \to ^+\infty)$. Ekkor $\lim(h_n) = 0 \Longrightarrow \lim(\sqrt[n]{n}) = 1$. □
7. $\lim\limits_{n \to ^+\infty}(\sqrt[n]{n!}) = ^+\infty$.
   Bizonyítás. $n! \geq \left(\frac{n}{4}\right)^n$, $n = 4, 5, \ldots$; ez teljes indukcióval igazolható. Ekkor $\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{4} > P$, ha $n \geq n_0 = [4P]+1 (n \in \mathbb{N})$. Ez minden P-re igaz. Ebből pedig az következik, hogy $\lim(\sqrt[n]{n!}) = ^+\infty$. □

4.7. Monoton sorozat határértéke:

4.12. tétel. Monoton sorozat határértéke:

1. Ha (a_n) sorozat monoton növekvő [csökkenő] és felülről [alulról] korlátos, akkor (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ [$\lim(a_n) = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$];

2. Ha (a_n) sorozat monoton növekvő [csökkenő] és felülről [alulról] nem korlátos, akkor (a_n) divergens és $\lim(a_n) =^+ \infty$ [$\lim(a_n) =^- \infty$].

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy (a_n) felülről korlátos. Ekkor $\exists \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} =: A$, mivel A a legkisebb felső korlát. Ebből pedig következik, hogy:

- $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \le A$;
- $\forall \varepsilon > 0 : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ A - \varepsilon < a_{n_0} \le A$.

DE: (a_n) monoton növekvő, amiből következik, hogy $\forall n \ge n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : \ A - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le A < A + \varepsilon \ \lim(a_n) = A$ [a másik hasonlóan igazolható].

2. Tegyük fel, hogy (a_n) felülről NEM korlátos. Ekkor $\forall P \in \mathbb{R} : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ a_{n_0} > P$. DE: (a_n) monoton növekvő, amiből következik, hogy $\forall n \ge n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : \ a_n \ge a_{n_0} > P \implies \lim(a_n) =^+ \infty$ [$\lim(a_n) =^- \infty$ hasonlóan igazolható]. $\square$

4.7.1. Nevezetes sorozatok:

1. Az e szám bevezetése:
   4.13. tétel. Az $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, amiből következik, hogy az (a_n) sorozat konvergens. Ekkor az $e := \lim\limits_{n \to ^+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számot Euler-állandónak nevezzük (1748).

   Megjegyzések:

   - *Az e szám a matematika egyik legfontosabb állandója;*
   - *Igazolható, hogy:*
     - *e irracionális;*
     - *e transzcendens.*
   - *Vessük össze π-vel!*

   Bizonyítás. Monoton növekvő: TRÜKK! $1,\ 1 + \frac{1}{n},\ \ldots\ 1 + \frac{1}{n}$ (számtani-mértani közti egyenlőtlenséggel igazolható). Ekkor $a_n = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$.
   Felső korlát $= 4$. TRÜKK! $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{n},\ \ldots\ 1 + \frac{1}{n}$ (számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséggel). Ekkor $\frac{a_n}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = \ldots = 1$, amiből következik, hogy $a_n < 4 \, (\forall n = 1, 2, \ldots)$. $\square$

   Következmény:
   $2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \implies 2 \le e \le 4$.
   Megjegyzés: $e \approx 2,781\ldots$.

2. $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, ha n nagy. Kérdés: melyik nagyobb? $1,000001^n$ *vagy* $n^{1,000001}$? Válasz: az előbbi.
   4.14. tétel. Nevezetes sorozatok határértékeinek kapcsolata:
   (a) Ha $a > 1,\ k = 1, 2, \ldots$, akkor $\lim\limits_{n \to ^+\infty} \left(\frac{n^k}{a^n}\right) = 0$;
   (b) Ha $|q| < 1,\ k = 1, 2, \ldots$, akkor $\lim\limits_{n \to ^+\infty} \left(n^k q^n\right) = 0$;
   (c) $\forall a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to ^+\infty} \left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0$;
   (d) $\lim\limits_{n \to ^+\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0$.

Megjegyzések:

- *(a)-ból következik, hogy* $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : 0 < \frac{n^k}{a^n} < \varepsilon$. *ϵ „kicsi", amiből következik, hogy* $n^k \ll a^n$*, ha n nagy;*
- *(a), (c), (d):* $a > 1$ *esetén* $\underbrace{n^k}_{\textit{Polinomiális}} \ll \underbrace{a^n}_{\textit{Exponenciális növekedésű}} \ll n! \ll n^n$*, ha n nagy.*

4.8. definíció. Ha $\lim(a_n) = \lim(b_n) = ^+\infty$, akkor azt mondjuk, hogy (b_n) gyorsabban (vagy erősebben) tart $^+\infty$-hez, mint (a_n), ha $\lim\limits_{n\to^+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$. Jelölés: $a_n \ll b_n$, ha n nagy.

4.15. tétel. (Segédtétel az előző tétel bizonyításához):
Tegyük fel, hogy (x_n) olyan sorozat, hogy:

- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 0$;
- $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ sorozat konvergens;
- $\lim\limits_{n\to^+\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = A < 1$.

Ekkor $\lim\limits_{n\to^+\infty}(x_n) = 0$.

Bizonyítás. 4-es, 5-ösért (lásd: AF|179). □

Bizonyítás. (az előző tétel bizonyítása):

(a) $$\frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1 \ (n \to^+ \infty)$$ (+a segédtétel);

(b) az (a)-ból következik: $n^k q^n = \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$;

(c) $$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1 \ (n \to^+ \infty);$$

(d) $$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

Megjegyzés: $e \approx 2,78 > 2 > 1$.

□

4.8. Rekurzív sorozat határértéke:

Megjegyzés: például $x_0 = 1,\ x_{n+1} = 2x_n + 5\ (n \in \mathbb{N})$.

Van-e határértéke a sorozatnak? Nem mindig! Egy sokszor alkalmazható módszer, ha igazoljuk, hogy ha (x_n) monoton és korlátos, akkor (x_n) konvergens. Ekkor $\lim(x_n)$ egyértelműen meghatározható.

4.16. tétel. Gyökvonás:

1. Legyen $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor $\forall A > 0 : \exists!\alpha > 0 : \alpha^m = A$ (α: az A m-edik gyöke; $\alpha = \sqrt[m]{A} =: A^{\frac{1}{m}}$);
2. Az $\begin{cases} x_0 > 0 \ \textit{tetszőleges} \\ x_{n+1} := \frac{1}{m}\left(\frac{A}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n\right) \quad (n = 0, 1, \ldots) \end{cases}$ rekurzív sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = \alpha$.

Bizonyítás. A bizonyítás több lépésben történik:

1. lépés: (x_n) jól definiált, ugyanis $x_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$);
2. lépés: egyértelműség, ugyanis $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \implies \alpha_1^m < \alpha_2^m$;
3. lépés: (x_n) korlátos, és nem növekvő, amiből következik, hogy (x_n) konvergens. Korlátosság: 0 egy alsó korlát, de a következő feltétel teljesülése is szükséges: $x_{n+1}^m = \left(\frac{\frac{A}{x_n^{m-1}} + x_n + \ldots + x_n}{m}\right)^m \geq \frac{A}{x_n^{m-1}} \cdot x_n \cdot \ldots \cdot x_n = A \implies$ $x_{n+1}^m \geq A > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Monotonitás: igazoljuk, hogy $x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ ($\forall n = 2, 3, \ldots$):

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{x_n^m} + m - 1\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{A - x_n^m}{x_n^m} + m\right) = \left(\frac{A - x_n^m}{m \cdot x_n^m}\right)^{\leq 0} + 1 \Longrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \, (n = 2, 3, \ldots)$, amiből következik, hogy (x_n) monoton csökkenő, tehát (x_n) konvergens (jelölése: $\alpha := \lim(x_n)$). Mivel $x_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, ezért $\alpha \geq 0$, de $\alpha = 0$ nem lehet, így $\alpha > 0$;

4. lépés: igazoljuk, hogy $\alpha^m = A$:
$x_{n+1} = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n\right)$ $(n \to^+ \infty)$. Ekkor $\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right)$, vagyis $m\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m$, tehát $\alpha^m = A$.

$\square$

Megjegyzés:

Miért fontos a tétel?

Legyen $m = 2$, $A = 2$, $\alpha = \sqrt{2}$ (ami tudjuk, hogy irracionális). Ekkor ($x_0 > 0$ tetszőleges racionális szám) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} + x_n\right) \in \mathbb{Q}$ (racionális számok halmaza); $n = 0, 1, \ldots$; $x_n \to \sqrt{2}$, tehát irracionális számok közelíthetőek racionális számokkal!

4.9. A műveletek és a határérték kapcsolata:

1. $a_n \to^+ \infty$, $b_n \to^+ \infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to^+ \infty$;
2. $a_n \to 1$, $b_n \to^+ \infty \Longrightarrow (a_n \cdot b_n) \to^+ \infty$.

Ezek alapján érdemes értelmezni $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{^+\infty, {}^-\infty\}$-on műveleteket, például: $(^+\infty) + (^+\infty) := {}^+\infty$, $1 \cdot (^+\infty) := {}^+\infty$, de vigyázni kell! Például $(^+\infty) + (^-\infty)$-t nem célszerű definiálni, ugyanis:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to^+ \infty \\ b_n \to^- \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow (a_n + b_n) \text{ esetén határérték szempontjából bármi előfordulhat!}$$

Egyszerű példák: AF|168-180.

4.9. definíció. Műveletek $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon:

1. Az $\mathbb{R}$-beli műveletek megmaradnak;
2. Összeadás: $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén:
   (a) $x + (^+\infty) := (^+\infty) + x :=^+ \infty$;
   (b) $x + (^-\infty) := (^-\infty) + x :=^- \infty$;
   (c) $(^+\infty) + (^+\infty) :=^+ \infty$;
   (d) $(^-\infty) + (^-\infty) :=^- \infty$;
3. Szorzás:
   (a) Ha $x > 0$:
      i. $x \cdot (^+\infty) := (^+\infty) \cdot x :=^+ \infty$;
      ii. $x \cdot (^-\infty) := (^-\infty) \cdot x :=^- \infty$;
   (b) Ha $x < 0$:
      i. $x \cdot (^+\infty) := (^+\infty) \cdot x :=^- \infty$;
      ii. $x \cdot (^-\infty) := (^-\infty) \cdot x :=^+ \infty$;
   (c) $(^+\infty) \cdot (^-\infty) :=^- \infty$, $(^+\infty) \cdot (^+\infty) :=^+ \infty$, $(^-\infty) \cdot (^-\infty) :=^+ \infty$;
4. Osztás: $\forall x \in \mathbb{R}: \ \frac{x}{^+\infty} := \frac{x}{^-\infty} := 0$.

Nem értelmezzük: $(^+\infty) + (^-\infty)$, $0 \cdot (^\pm\infty)$, $\frac{^\pm\infty}{^\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$.

4.17. tétel. A határérték és a műveletek kapcsolata:

Tegyük fel, hogy $\exists \lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor:

1. Ha $A + B$ értelmezve van, akkor $\exists \lim(a_n + b_n)$ és $\lim(a_n + b_n) = A + B$;
2. Ha $A \cdot B$ értelmezve van, akkor $\exists \lim(a_n b_n)$ és $\lim(a_n b_n) = A \cdot B$;
3. Ha $0 \notin R_{(b_n)}$ és $\frac{A}{B}$ értelmezve van, akkor $\exists \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ és $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$.

Megjegyzések:

- *Kritikus határértékek (ekkor a tétel nem használható):* $({}^{+}\infty) + ({}^{-}\infty)$, $0 \cdot ({}^{\pm}\infty)$, $\frac{{}^{\pm}\infty}{{}^{\pm}\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$;
- *A konvergenciához képest sok új esetet tartalmaz a fenti tétel:*

Összegnél:

	$A \in \mathbb{R}$	$A = {}^{+}\infty$	$A = {}^{-}\infty$
$B \in \mathbb{R}$	$A + B$ *konvergens*	${}^{+}\infty$	${}^{-}\infty$
$B = {}^{+}\infty$	${}^{+}\infty$	${}^{+}\infty$	-
$B = {}^{-}\infty$	${}^{-}\infty$	-	${}^{-}\infty$

Szorzatnál:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = {}^{+}\infty$	$A = {}^{-}\infty$
$B > 0$	$A \cdot B$ *konvergens*			${}^{+}\infty$	${}^{-}\infty$
$B = 0$				-	
$B < 0$				${}^{-}\infty$	${}^{+}\infty$
$B = {}^{+}\infty$	${}^{+}\infty$	-	${}^{-}\infty$	${}^{+}\infty$	${}^{-}\infty$
$B = {}^{-}\infty$	${}^{-}\infty$		${}^{+}\infty$	${}^{-}\infty$	${}^{+}\infty$

Osztásnál: hasonlóan.

Bizonyítás. Például:

1. *Összegre:* $A = {}^{+}\infty$, $B \in \mathbb{R}$: $a_n \to {}^{+}\infty$, $b_n \to B \in \mathbb{R}$. *Ekkor* $b_n \to B \in \mathbb{R} \implies (b_n)$ *alulról korlátos, amiből az következik, hogy* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : M \leq b_n$. $a_n \to {}^{+}\infty \implies \forall P \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > P - M$, *amiből következik, hogy* $\forall n \geq n_0 : a_n + b_n > P - M + M = P \implies \lim(a_n + b_n) = {}^{+}\infty$;
2. *Szorzatra:* $A = {}^{+}\infty$, $B > 0$, $B \in \mathbb{R}$, $a_n \to {}^{+}\infty$, $b_n \to B > 0$, *amiből az következik, hogy* $b_n \to B > 0$, *ebből pedig következik, hogy* $\varepsilon = \frac{B}{2} > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : b_n > \frac{B}{2} > 0$. *Ekkor* $a_n \to {}^{+}\infty$, *amiből következik, hogy* $\forall P \in \mathbb{R} : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : a_n > \frac{P}{B/2}$. *Ebből az következik, hogy* $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\} \implies a_n b_n > \frac{P}{B/2} \cdot B/2 = P$, *amiből következik, hogy* $\lim(a_n b_n) = {}^{+}\infty$;
3. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$. *Itt elég megmutatni, hogy* $b_n \to {}^{\pm}\infty \implies \frac{1}{b_n} \underset{n \to {}^{+}\infty}{\longrightarrow} 0$. *Tegyük fel, hogy* $b_n \to {}^{+}\infty \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : b_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \implies \forall n \geq n_0 : 0 < \frac{1}{b_n} < \varepsilon \implies \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = 0$.

□

4.9.1. Elméleti szempontból fontos eredmények:

4.18. tétel. Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel:

Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. A bizonyításhoz először ki kell mondanunk egy segédtételt:

4.19. tétel. (segédtétel):

Minden sorozatnak létezik monoton részsorozata.

Bizonyítás. A segédtétel bizonyításához definiáljuk egy tetszőleges sorozat csúcsát:

4.10. definíció. Az a_{n_0} az (a_n) sorozat csúcsa, ha $\forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n_0}$.

Két eset lehetséges:

1. (a_n)-nek végtelen sok csúcsa van. Ebből az következik, hogy $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_{n_0}$ *csúcs* $\implies \forall n \geq n_0: \ a_n \leq a_{n_0}$. Ekkor $\exists n_1 \geq n_0: \ a_{n_1}$ is csúcs, amiből következik, hogy $\forall n \geq n_1: \ a_n \leq a_{n_1} \leq a_{n_0}$. Ekkor $\exists n_2 \geq n_1: \ a_{n_2}$ is csúcs: $\forall n \geq n_2: \ a_n \leq a_{n_2} \leq a_{n_1} \leq a_{n_0}$, és így tovább. Ebből pedig következik, hogy a csúcsoknak van egy $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots \quad a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots \ (a_{n_k})$ monoton csökkenő részsorozata;
2. (a_n)-nek véges sok csúcsa van. Ekkor $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N: \ a_n$ nem csúcs. Ekkor:
   (a) Ha a_n nem csúcs, akkor $\exists n_1 > n: \ a_{n_1} > a_n$;

   (b) Ha a_{n_1} nem csúcs, akkor $\exists n_2 > n_1: \ a_{n_2} > a_{n_1}$;

   (c) Ha a_{n_2} nem csúcs, akkor $\exists n_3 > n_2: \ a_{n_3} > a_{n_2}$; és így tovább.
   Ebből pedig az következik, hogy $\exists a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \ldots \implies \exists \, (a_{n_k})$ monoton növekvő részsorozat.

□

Most rátérhetünk a Bolzano-Weierstrass-tétel bizonyítására: ha (a_n) korlátos, akkor $\exists \, (a_{n_k})$ monoton részsorozata. A monotonitásból és a korlátosságból pedig az következik, hogy a sorozat konvergens.

□

4.20. tétel. Tegyük fel, hogy (a_n) felülről [alulról] nem korlátos. Ekkor $\exists \, (a_{n_k}): \lim (a_{n_k}) =^{+} \infty$ $[\lim (a_{n_k}) =^{-} \infty]$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) felülről nem korlátos. Ekkor $\forall K \in \mathbb{R}: \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_{n_0} > K$, vagyis:

- $K_0 = 0$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_{n_0} > 0$;
- $K_1 := \max \{1, \, a_{n_0}\}$ esetén $\exists n_1 \in \mathbb{N} \, (n_1 > n_0): \ a_{n_1} > K_1 \geq 1$;
- $K_2 := \max \{2, \, a_{n_0}, \, a_{n_1}\}$ esetén $\exists n_2 \in \mathbb{N} \, (n_2 > n_1): \ a_{n_2} > K_2 \geq 2$;
- $K_j := \max \left\{j, \, a_{n_0}, \, a_{n_1}, \, \ldots, \, a_{n_{j-1}}\right\}$ esetén $\exists n_j \in \mathbb{N} \, (n_j > n_{j-1}): \ a_{n_j} > K_j \geq j$.

Ebből pedig az következik, hogy $\exists \left(a_{n_j}\right)$ részsorozat, melyre $a_{n_j} \geq j$ ($\forall j \in \mathbb{N}$), emiatt pedig $\lim\limits_{n_j \to^{+} \infty} \left(a_{n_j}\right) =^{+} \infty$.

$\left[\lim \left(a_{n_j}\right) =^{-} \infty\right.$ *igazolása hasonló.*]

□

4.9.2. Cauchy-kritérium:

4.11. definíció. Cauchy-sorozat:

Az (a_n) Cauchy-sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0: \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n, m \geq n_0 \, (n, m \in \mathbb{N}): \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Megjegyzés: pongyolán fogalmazva, a nagy indexű tagok közel vannak egymáshoz.

Példák:

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$ Cauchy-sorozat, ugyanis: $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-n}{m \cdot n}\right| = \left|\frac{m-n}{m}\right| \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$;
2. $((-1)^n)$, (n) nem Cauchy-sorozatok. A formális bizonyítás meggondolandó!

4.21. tétel. Cauchy-féle konvergencia kritérium:

Az (a_n) sorozat pontosan akkor konvergens (véges határértékű), ha az (a_n) Cauchy-sorozat.

Megjegyzések:

- *Ez az Analízis egyik legfontosabb tétele;*
- *Jelentősége, hogy a konvergenciára olyan szükséges és elégséges feltételt ad, amelyben csakis a sorozat tagjai szerepelnek, a határérték nem;*

- *A tétel a $\pm\infty$ határértékre nem igaz.*

Bizonyítás. $\Longrightarrow$: tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. Ekkor $|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (ha $n, m \geq n_0$). Tehát az (a_n) Cauchy-sorozat. $\Longleftarrow$: tegyük fel, hogy (a_n) Cauchy-sorozat. Ekkor a bizonyítás több lépésben történik:

1. Az (a_n) korlátos: mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon = 1$-hez $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 (n, m \in \mathbb{N}) : |a_n - a_m| < 1$, ebből pedig az következik, hogy $\forall n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$: $|a_n| = |(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}| \implies |a_n| \leq K := \max\{1 + |a_{n_0}|, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$;
2. A Bolzano-Weierstrass tételből következik, hogy $\exists (a_{n_k})$ konvergens részsorozat, vagyis $\lim(a_{n_k}) = A \in \mathbb{R}$;
3. Igazoljuk, hogy A az egész sorozat határértéke is! Ekkor $|a_n - A| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - A)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$. $\lim(a_{n_k}) = A$, vagyis $\forall \varepsilon > 0 : \exists n^* \in \mathbb{N} : \forall n \geq n^*$ $(n \in \mathbb{N})$: $|a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. (a_n) Cauchy-sorozat: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n^{**} \in \mathbb{N} : \forall n, n_k \geq n^{**}$ $(n, n_k \in \mathbb{N})$: $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$, tehát ε-hoz $\exists n_0 := \max\{n^*, n^{**}\} : \forall n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$: $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ebből pedig az következik, hogy $\lim(a_n) = A$.

□

4.10. Végtelen sorok (speciális képzésű sorozatok):

Probléma: hogyan értelmezzük végtelen sok szám összegét $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$?

Egy természetes lehetőség:

- $s_1 = a_1$;
- $s_2 = a_1 + a_2$;
- $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, *és így tovább.*

Ha (s_n) sorozat konvergens, akkor értelmezzük az összeget, és $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \lim(s_n)$, ha (s_n) divergens, akkor pedig nem értelmezzük.

4.12. definíció. Az (a_n) sorozatból képzett végtelen soron az

- $s_1 = a_1$;
- $s_2 = a_1 + a_2$;
- $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

sorozatot értjük, és ezt így jelöljük:

$\sum\limits_{n=1} a_n$ vagy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$

s_n: a $\sum a_n$ sor n-edik részletösszege.

4.13. definíció. A $\sum a_n$ sor konvergens, ha az (s_n) részletösszeg-sorozat konvergens (véges a határértéke). Ekkor a $\lim(s_n)$-t a $\sum a_n$ összegének nevezzük, és ezt így jelöljük: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim(s_n)$.

A $\sum a_n$ sor divergens, ha (s_n) divergens.

Megjegyzés a jelölésekhez:

$\sum\limits_{n=1} a_n$ egy sorozatot jelöl, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ egy valós szám.

Példák nevezetes sorokra:

1. Geometriai (vagy mértani) sor:

   Legyen $q \in \mathbb{R}$: $\sum(q^n)$. A $\sum q^n$ sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$.

   Bizonyítás. $s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & |q \neq 1 \\ n & |q = 1 \end{cases}$, ugyanis $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, ahol $a = 1$, $b = q$. Ekkor $\lim(s_n) = \frac{1}{1-q}$ (ugyanis $q^n \to 0$), ha $|q| < 1$. Ha $q = 1$, $\lim(s_n) =^+ \infty$, akkor (s_n) nem konvergens. □

2. Teleszkopikus sor:

   A $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ sor konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   Bizonyítás. $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Ötlet: $\boxed{\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \checkmark}$. Ekkor $s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to^+\infty}{\to} 1 \implies \lim(s_n) = 1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. □

3. A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

   Bizonyítás. $s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2\,(\forall n \in \mathbb{N})$, ebből pedig az következik, hogy $\left.\begin{matrix} (s_n)\,\textit{felülről korlátos} \\ (s_n)\,\textit{monoton növekvő} \end{matrix}\right\} \implies (s_n)\,\textit{konvergens}$, és $\lim(s_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$. □

   Megjegyzés: igazolható, hogy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. A $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.

   Bizonyítás. Igazoljuk, hogy (s_n) felülről nem korlátos, azaz $s_n \to^+ \infty$! Ötlet: $\boxed{s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^k+2^k}\right) + \ldots + \frac{1}{n}}$. Ekkor $\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^k+2^k} \geq 2^k \cdot \frac{1}{2^k+2^k} = \frac{1}{2}$, amiből következik, hogy minden csoportban az összeg legalább $\frac{1}{2}$, így $s_n \to^+ \infty$, azaz $\sum \frac{1}{n}$ divergens. □

4.22. tétel. Szükséges és elégséges feltétel a konvergenciára (Cauchy-féle kritérium sorokra):

A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 (m, n \in \mathbb{N}) : |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$.

Bizonyítás. A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha (s_n) konvergens, ami akkor és csak akkor teljesül (a Cauchy-féle kritérium szerint, sorozatra alkalmazva), ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0\ (m, n \in \mathbb{N}) : |s_m - s_n| = |(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (a_1 + \ldots + a_n)| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$. □

4.23. tétel. Szükséges feltétel a konvergenciára:

Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim(a_n) = 0$.

Ez a feltétel nem elégséges, ugyanis $\lim(a_n) = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ konvergens $\left(pl.: \sum \frac{1}{n}\right)$.

Bizonyítás. Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall a_n > n \geq n_0 : |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$. Legyen $m = n + 1$. Ekkor $|a_{n+1}| < \varepsilon \implies \lim(a_n) = 0$. □

4.14. definíció. A $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

4.24. tétel. Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.

Megjegyzés: fordítva ez nem igaz, azaz az abszolút konvergencia a konvergenciánál „erősebb” fogalom!

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ekkor $\sum |a_n|$ konvergens, amiből a Cauchy-féle kritérium alapján következik, hogy $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0\ (m, n \in \mathbb{N}) : ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m|| < \varepsilon$, ebből pedig az következik, hogy $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$, amiből következik, hogy $\sum a_n$ konvergens. □

4.10.1. Pozitív tagú sorok:

4.15. definíció. A $\sum a_n$ pozitív tagú sor, ha $a_n \geq 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$.

4.25. tétel. A $\sum a_n$ pozitív tagú sor pontosan akkor konvergens, ha az (s_n) részletösszeg-sorozat korlátos (ugyanis az (s_n) monoton növekvő).

4.26. tétel. Összehasonlító kritérium:

Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n) olyan sorozatok, melyekre $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ (n \in \mathbb{N}) :\ 0 \leq a_n \leq b_n$ (*). Ekkor:

1. Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens (Majoráns kritérium);
2. Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens (Minoráns kritérium).

Bizonyítás. Legyen (s_n^a): $\sum a_n$ részletösszeg-sorozata, (s_n^b): $\sum b_n$ részletösszeg-sorozata. Ekkor:

1. Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor (s_n^b) is korlátos ((s_n^b) monoton növekvő), így (* miatt) (s_n^a) korlátos és monoton növekvő, amiből az következik, hogy (s_n^a) konvergens, így $\sum a_n$ is konvergens;
2. Ha $\sum a_n$ divergens, akkor (s_n^a) felülről nem korlátos, amiből pedig az következik (* miatt), hogy (s_n^b) felülről nem korlátos, így $\sum b_n$ divergens.

□

4.27. tétel. Cauchy-féle gyökkritérium:

Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ sorra $\exists \lim\limits_{n\to^+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: A$. Ekkor:

- Ha $0 \leq A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát $\sum a_n$ konvergens is;
- Ha $A > 1$, akkor a $\sum a_n$ divergens;
- Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens is, divergens is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 \leq A < 1$. Ekkor $\exists q :\ A < q < 1 :\ \lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = A \implies q - hoz\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, amiből az következik, hogy $\forall n \geq n_0 :\ |a_n| \leq q^n\ (0 < q < 1)$, így $\sum q^n$ konvergens, amiből a Majoráns kritérium alapján következik, hogy $\sum |a_n|$ konvergens, azaz $\sum a_n$ abszolút konvergens, amiből következik, hogy $\sum a_n$ konvergens is.

Tegyük fel, hogy $A > 1 :\ \lim \sqrt[n]{|a_n|} = A$. Ekkor $A > q > 1 - hez\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{|a_n|} \geq q \implies |a_n| \geq q^n$, így $q > 1$ miatt $\lim(a_n) \neq 0 \implies \sum a_n$ divergens.

Tegyük fel, hogy $A = 1$. Ekkor:

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens; $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = 1$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens; $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim\left(\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\right) = 1$

□

4.28. tétel. D'Alembert-féle hányadoskritérium:

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sorra:

- $a_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$;
- $\exists \lim \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor:

- Ha $0 \leq A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;
- Ha $A > 1$, akkor $\sum a_n$ sor divergens;
- Ha $A = 1$, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 \leq A < 1$. Ekkor $\lim \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = A \implies q : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$ $(\forall n \geq n_0)$. Legyen $n \geq n_0$. Ekkor $|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \leq q^2 |a_{n-1}| \leq \ldots \leq q^{n+1-n_0} |a_{n_0}| = \underbrace{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0-1}}}_{c} \cdot q^n$. Mivel (a majoráns kritérium alapján) $0 \leq q < 1$, ezért $\sum c \cdot q^n$ konvergens, tehát a $\sum |a_n|$ is konvergens, azaz $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Tegyük fel, hogy $A > 1$. Ekkor $\lim \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = A \implies q : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq q$ $(\forall n \geq n_0)$. Legyen $n \geq n_0$. Ekkor $|a_{n+1}| \geq q \cdot |a_n| \geq q^2 \cdot |a_{n-1}| \geq \ldots \geq q^{n+1-n_0} |a_{n_0}|$. Mivel $q > 1$, ezért $\lim(|a_{n+1}|) =^{+} \infty$, azaz $\lim(a_n) \neq 0$, ebből pedig következik (szükséges feltétel), hogy $\sum a_n$ divergens.

Tegyük fel, hogy $A = 1$. Ekkor:

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens, és $\lim \left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$;
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, és $\lim \left(\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right) = 1$.

□

4.10.2. Leibniz-típusú sorok:

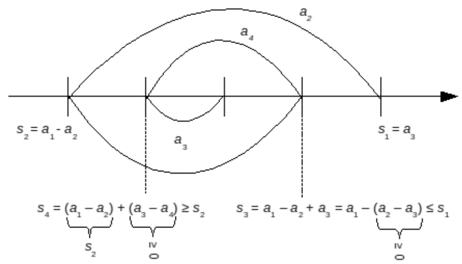
4.16. definíció. Leibniz-típusú sor:

Tegyük fel, hogy $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Ekkor az $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots = \sum_{n=1}(-1)^{n+1} a_n$ sort Leibniz-típusú sornak nevezzük.

4.29. tétel. Leibniz-tétel:

1. Konvergencia: a $\sum(-1)^{n+1} a_n$ Leibniz-típusú sor pontosan akkor konvergens, ha $\lim(a_n) = 0$;
2. Hibabecslés: tegyük fel, hogy a $\sum(-1)^{n+1} a_n$ Leibniz-típusú sor konvergens. Legyen $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n =: A$. Ekkor $|A - s_n| = \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k\right| \leq a_n$.

Bizonyítás. $\boxed{1}\boxed{\implies}$: A $\sum(-1)^{n+1} a_n$ pontosan akkor konvergens (szükséges feltétel), ha $\lim\left((-1)^{n+1} a_n\right) = 0 \implies \lim(a_n) = 0$. $\boxed{\impliedby}$: Tegyük fel, hogy $\sum(-1)^{n+1} a_n$ Leibniz-típusú és $\lim(a_n) = 0$. Legyen $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ (4.4. ábra). Mivel (a_n) monoton csökkenő, ezért (s_{2n+1}) részsorozat is monoton csökkenő, és $s_2 \leq s_{2n+1} \leq s_1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Ebből pedig következik a konvergencia, azaz: $\lim(s_{2n+1}) =: B$, továbbá (s_{2n}) monoton növekvő, és $s_2 \leq s_{2n} \leq s_1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, amiből szintén következik a konvergencia, és $\lim(s_{2n}) =: A$.



4.4. ábra. Leibniz-sor

Mivel $\underbrace{s_{2n+1}}_{\substack{\downarrow \\ B}} = \underbrace{s_{2n}}_{\substack{\downarrow \\ A}} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$ $(\forall n \in \mathbb{N};\ n \to^{+} \infty)$, ezért $A = B$, így (s_n) konvergens, amiből az következik, hogy $\sum (-1)^{n+1} a_n$ konvergens.

$\boxed{2 \mid \text{Hibabecslés}}$: tegyük fel, hogy $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Ekkor $|A - s_{2n}| \le s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \le a_{2n}$. Mivel $|A - s_{2n+1}| \le s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$, ezért $|A - s_n| \le a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. □

4.17. definíció. Abszolút/Feltételesen konvergens sor:

1. A $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens;
2. A $\sum a_n$ sor feltételesen konvergens, ha:
   (a) A $\sum a_n$ sor konvergens;
   (b) A $\sum |a_n|$ sor divergens.

Példa:

A $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ sor feltételesen konvergens, ugyanis:

- Konvergens, mert Leibniz-típusú;
- $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ divergens.

4.30. tétel. Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.

Megjegyzés: visszafele a tétel már nem feltétlenül igaz, például: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Alkalmazás:

- Például: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$ konvergens, ugyanis:
  - Leibniz-típusú;
  - Abszolút konvergens $\left(\sum \frac{1}{n^2}\ \textit{konvergens}\right)$;
- Sőt: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ tetszőleges előjelezése is konvergens.

4.10.3. Tizedestörtek:

4.31. tétel. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a $\sum\limits_{n=1} \frac{a_n}{10^n}$ sor konvergens, és $\alpha := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0, 1]$, ahol $\alpha =: 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ az α tizedestört alakja.

Bizonyítás. Legyen $0 \le a_n \le 9$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Ekkor $\sum \frac{a_n}{10^n} \le \sum\limits_{n=1} \frac{9}{10^n}$, így $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right) \overset{geom.}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$ □

Kérdés: Minden $[0, 1]$-beli szám felírható-e ilyen alakban?

4.32. tétel. $\forall x \in [0, 1) : \exists (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = x.$

Bizonyítás. Legyen $x \in [0, 1)$:

- 1. Lépés: $[0, 1)$-et 10 egyenlő részre osztjuk. Ekkor $\exists a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, és $\exists I_1 = \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right]$, $x \in I_1 : \frac{a_1}{10} \le x \le \frac{a_1+1}{10}$;
- 2. Lépés: I_1-et osztjuk 10 egyenlő részre. Ekkor $\exists a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, és $\exists I_2 = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}\right]$, $x \in I_2 : \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le x \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}$, és így tovább;
- n. Lépés: I_{n-1}-et 10 részre osztjuk. Ekkor $\exists a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, és $\exists I_n = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n}\right]$, $x \in I_n : \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \le x \le \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n}$, amiből következik, hogy $\left|x - \left(\frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}\right)\right| \le \frac{1}{10^n} \to 0$ $(n \to^+ \infty)$.

□

4.10.4. *P*-adikus törtek:

Megjegyzés: $P = 2, 3, \dots$.

4.33. tétel. Tegyük fel, hogy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : a_n \in \{0, 1, \dots, P-1\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Ekkor $\sum\limits_{n=1} \frac{a_n}{P^n}$ sor konvergens és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{P^n} \in [0, 1]$.

4.34. tétel. $\forall x \in [0, 1) : \exists (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : a_n \in \{0, 1, \dots, P-1\}$ $(n \in \mathbb{N}) : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{P^n} = x.$

Megjegyzés: egyértelműségről általában nincs szó. Például: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{2} = 0,4999\dots$, ugyanis $\frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés - Elnevezések:

A $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ tizedestört:

1. *Véges:* $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 : a_n = 0$;
2. *Végtelen (nem véges):*
   (a) *Szakaszos:* $0, a_1 \dots a_m b_1 \dots b_s \dots$;
   (b) *Nem szakaszos.*

Meggondolandó:

4.35. tétel.
1. $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ pontosan akkor teljesül, ha tizedestört alakja véges, vagy végtelen, szakaszos;
2. $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}^*$ pontosan akkor teljesül, ha tizedestört alakja végtelen, nem szakaszos.

4.10.5. Műveletek sorokkal:

Megjegyzés: a sorok véges összegek általánosítása. Kérdés: Véges összegek tulajdonságai (kommutativitás, asszociativitás) megmaradnak-e sorokra (végtelen összegekre)?

„Dallam": általában NEM, de abszolút konvergens sorokra IGEN!

4.18. definíció. Sorok átrendezése (kommutativitás):

Legyen $(P_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció (az $\mathbb{N}$ egy átrendezése). A $\sum a_n$ sor (P_n) által meghatározott átrendezésén a $\sum a_{P(n)}$ sort értjük.

4.36. tétel. Riemann-tétel:

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor feltételesen konvergens. Ekkor:

1. $\forall A \in \overline{\mathbb{R}} : \exists (P_n)\ \textit{átrendezés} : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{P(n)} = A;$
2. Létezik olyan (P_n) átrendezés, hogy $\sum a_{P(n)}$ divergens.

Bizonyítás. Ehhez a tételhez nem tartozik bizonyítás. Példa: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. □

Emlékeztető: végtelen sorok átrendezése!

4.37. tétel. Ha $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor $\forall (P_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció esetén a $\sum a_{P_n}$ átrendezett sor abszolút konvergens, és az összeg sem változik: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{P_n}$.

Megjegyzés: véges összeg asszociatív $((a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (\ldots) + \ldots + (a_n))$, *azaz tetszőlegesen csoportosítható (vagy zárójelezhető):*

- *A zárójelek elhelyezhetők;*
- *elhagyhatók.*

Sorok zárójelezése (asszociativitás):

Megjegyzés: $\underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m_1})}_{\alpha_1} + \underbrace{(a_{m_1+1} + \ldots + a_{m_2})}_{\alpha_2} + \ldots;\ (m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton növekvő (indexsorozat).*

4.19. definíció. $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ (m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő (index)sorozat. A $\sum a_n$ sor (m_n) sorozat által meghatározott zárójelezésén a $\sum \alpha_n$ sort értjük, ahol: $\alpha_n := \sum\limits_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i\ (n \in \mathbb{N};\ m_0 = 0)$.

4.38. tétel. Zárójelek elhelyezése:

Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor minden lehetséges zárójelezése is konvergens, és az összeg a zárójelezéssel nem változik.

Bizonyítás. Tekintsük a $\sum a_n$, $\sum \alpha_n$ sorokat:

$\sum a_n$ sor	$\sum \alpha_n$ zárójelezett sor
$s_n = a_1 + \ldots + a_n$	$\sigma_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \overset{!!}{=} s_{m_n}$ (σ_n): az (s_n) egy részsorozata

Ekkor $\lim(s_n) = A \implies \lim(a_n) = \lim(s_{m_n}) = A$. □

Megjegyzés: zárójelek általában nem hagyhatók el. Például:

- $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$ *konvergens;*
- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ *divergens.*

4.39. tétel. Zárójelek elhagyása:

Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy:

1. $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő;
2. $(m_{n+1} - m_n)$ sorozat korlátos;
3. $\lim(a_n) = 0$;
4. A $\sum a_n$ sor $\sum \alpha_n$ zárójelezése konvergens.

Ekkor a $\sum \alpha_n$ sorban a zárójelek elhagyásával kapott $\sum a_n$ sor is konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Algebrai műveletek sorokkal:

Sorok összege, számszorosa:

4.40. tétel. Tegyük fel, hogy $\sum a_n$, $\sum b_n$ konvergens. Ekkor:

1. A $\sum(a_n + b_n)$ sor is konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: a $\sum \lambda a_n$ sor konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Bizonyítás. 1.: $A_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \to A$, $B_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \to B$; $\sum(a_n + b_n)$: $C_n := \sum\limits_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k = A_n + B_n \to A + B$.

2.: Hasonlóan igazolható. □

Sorok szorzása:

Emlékeztető: véges összegek szorzása: $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(b_0 + b_1 + \ldots + b_m) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + \ldots + a_n b_m$ *(minden tagot minden taggal megszorzunk).*

Sorokra: $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ (4.2. táblázat);

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$
b_0	$a_0 b_0$	$a_1 b_0$	$a_2 b_0$	$a_3 b_0$	$\ldots$
b_1	$a_0 b_1$	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	$\ldots$
b_2	$a_0 b_2$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	$\ldots$
b_3	$a_0 b_3$	$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ebből sokféleképpen képezhető végtelen sor, amiből az következik, hogy sokféleképpen értelmezhető a sorok szorzata.

4.2. táblázat. Sorok szorzása

Két fontos speciális esetet különböztetünk meg:

1. Téglány-szorzat;

2. Cauchy-szorzat.

4.20. definíció. Téglány/Cauchy-szorzat:

A $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok:

1. Téglány-szorzata: $\sum\limits_{n=0} t_n$ sor, ahol $t_n := \sum\limits_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j, \ n = 0, 1, 2, \ldots;$
2. Cauchy-szorzata: $\sum\limits_{n=0} c_n$ sor, ahol $c_n := \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$

4.41. tétel. Ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok konvergensek, akkor a $\sum t_n$ Téglány-szorzat is konvergens, és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Bizonyítás. $\sum\limits_{n=0}^{N} t_n \overset{!!}{=} \left(\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{N} b_n\right) \to \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$. □

Megjegyzés: a fenti állítás a Cauchy-szorzatra NEM igaz, például: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergens (Leibniz) sor, önmagával vett Cauchy-szorzata azonban divergens (lásd: AF/275)!

4.42. tétel. Cauchy-tétel:

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok abszolút konvergensek. Ekkor:

1. A $\sum t_n$ Téglány-szorzat is abszolút konvergens;
2. A $\sum c_n$ Cauchy-szorzat is abszolút konvergens;
3. Az összes $a_i b_j$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett $\sum d_n$ végtelen sor is abszolút konvergens, és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Bizonyítás. 3.: $A_N := \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ (ugyanis $\sum a_n$ abszolút konvergens), $B_N := \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$ (ugyanis $\sum b_n$ abszolút konvergens). Tekintsük a $\sum d_n$ sort: $d_n = \sum a_i b_j$. Legyen $\sigma_N := \sum\limits_{n=0}^{N} |d_n| \overset{!!}{\leq} \left(\sum\limits_{n=0}^{I} |a_n|\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{J} |b_n|\right) \leq A \cdot B$; I : max i *index* $d_0, d_1, \ldots, d_N - ben$, J : max j *index* $d_0, d_1, \ldots, d_N - ben$. Ekkor (σ_N) konvergens, amiből következik, hogy $\sum d_n$ abszolút konvergens, így $\sum c_n$, $\sum t_n$ is abszolút konvergens, amiből következik továbbá, hogy $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$ (a Téglány-szorzatra vonatkozó tétel alapján), DE abszolút konvergens is, így tetszőlegesen átrendezhető, csoportosítható az összeg megváltoztatása nélkül, emiatt pedig $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n$. □

Megjegyzés: a tétel feltételei gyengíthetők Cauchy-szorzat esetén.

4.43. tétel. Mertens tétele:

Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ abszolút konvergens, és $\sum b_n$ konvergens. Ekkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzat konvergens, és $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

4.10.6. Hatványsorok:

(Polinomok általánosítása végtelen sor tagra)

Adott egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz és $\forall n \in \mathbb{N}:\ f_n : A \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor (f_n) függvénysorozat, és $\sum_{n=0} f_n : \sum_{k=0}^{n} f_k;\ n = 0, 1, 2, \ldots$ függvénysor:

- Konvergenciahalmaz: $KH\left(\sum_{n=0} f_n\right) := \left\{x \in A \,\middle|\, \sum_{n=0} f_n(x)\ \textit{számsor konvergens}\right\}$;
- Összegfüggvény: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n :\ KH\left(\sum_{n=0} f_n\right) \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

4.21. definíció. Az adott $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénysort a középpontú hatványsornak nevezzük.

Megjegyzések:

- *Hatványsor részletösszegei polinomok („jól” kezelhetők), például:* $f_n(x) := x^n\,(x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \ldots)$; $\sum_{n=0} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$ *geometriai sor:*
  - $KH\left(\sum_{n=0} x^n\right) = (-1, 1)$;
  - *Összegfüggvény:* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(x \in (-1, 1))$;
- *Tetszőleges hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy intervallum!*

4.44. tétel. Általános Cauchy-Hadamard-tétel:

Tetszőleges $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor esetén a következő 3 eset egyike lehetséges:

1. $\exists 0 < R <^{+} \infty$: a hatványsor abszolút konvergens: $\forall x :\ |x-a| < R$, divergens: $\forall x :\ |x-a| > R$;
2. A hatványsor csak az $x = a$-ban konvergens (ekkor $R := 0$);
3. A hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergens ($R =^{+} \infty$; R: a hatványsor konvergenciasugara). Röviden: $\exists R : (a-R,\ a+R) \subset KH\left(\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n\right) \subset [a-R,\ a+R]$ (megjegyzés: a végpontokban bármi lehet).

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a = 0$, azaz (*) $\sum \alpha_n x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$.

4.45. tétel. Segédtétel:

Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor abszolút konvergens $x_0 = 0$-ban. Ekkor $\forall x : |x| < |x_0|$ pontban a hatványsor szintén abszolút konvergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\sum |\alpha_n x_0^n|$ konvergens. Ebből az következik, hogy $\lim\left(|\alpha_n x_0|^n\right) = 0$ (szükséges feltétel), amiből következik továbbá, hogy $(\alpha_n x_0^n)$ korlátos. Ekkor $\exists M > 0 : |\alpha_n x_0^n| \leq M \, (\forall n \in \mathbb{N})$. Legyen $|x| < |x_0|$. Ekkor $|\alpha_n x^n| = |\alpha_0 x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. DE: $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ és $\sum M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ (geometriai sor) konvergens, amiből az következik (a majoráns kritérium alapján), hogy $\sum |\alpha_n x^n|$ konvergens, így $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. □

A tétel bizonyítása:

Tekintsük a $\sum \alpha_n x^n$ sort. Ez az $x = 0$-ban konvergens, amiből következik, hogy $0 \in KH\left(\sum \alpha_n x^n\right) \implies \exists \sup KH\left(\sum \alpha_n x^n\right) = R \in \overline{\mathbb{R}}$ és $R \geq 0$.

A következő esetek lehetnek:

1. $0 < R <^+ \infty$ (ekkor a tételbeli 1-es): legyen $|x| < R \implies \exists x_0 \in KH(\ldots) : |x| < x_0 < R$ (a szuprémum definíciója alapján). A hatványsor x_0-ban konvergens, így (a segédtétel alapján) $|x|$-ben is konvergens, $\sum \alpha_n x^n$ pedig abszolút konvergens. Legyen $|x| > R \implies \exists x_0 : R < x_0 < |x| \implies \sum \alpha_n x_0^n$ divergens, így (a segédtétel alapján) $\sum (\alpha_n x^n)$ is divergens, amiből az következik, hogy $\sum \alpha_n x^n$ is divergens;
2. Tegyük fel, hogy $R = 0$. Igazoljuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén a $\sum d_n x^n$ divergens! Ekkor, ha $x \neq 0$-ra $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens, akkor $\forall\, |x_0| < |x|$-re is konvergens. Ez $x_0 \neq 0$-ra nem teljesül;
3. Tegyük fel, hogy $R =^+ \infty$. Igazoljuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens! Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és $x_0 : |x| < |x_0|$. Mivel $R =^+ \infty$, ezért $\sum \alpha_n x_0^n$ abszolút konvergens, így (a segédtétel alapján) x-ben is az.

□

Megjegyzés: az R konvergenciasugár bizonyos esetekben kiszámolható.

4.46. tétel. Cauchy-Hadamard I.

Tegyük fel, hogy $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsorban $\exists \lim\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor $R := \begin{cases} \frac{1}{A} & | 0 < A <^+ \infty \\ 0 & | A =^+ \infty \\ ^+\infty & | A = 0 \end{cases}$ a hatványsor konvergenciasugara, azaz:

- $\forall x : |x - a| < R$ esetén a hatványsor abszolút konvergens,
- $\forall x : |x - a| > R$ esetén a hatványsor divergens.

Bizonyítás. $\sum \alpha_n (x-a)^n$ számsorra a gyökkritérium: $\sqrt[n]{|\alpha_n (x-a)^n|} = \sqrt[n]{|\alpha_n|} \cdot |x - a| \to A \cdot |x - a| \begin{matrix} < \\ > \\ = \end{matrix} 1.$ □

4.47. tétel. Cauchy-Hadamard II.

Tegyük fel, hogy adott $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor, $\alpha_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, és $\exists \lim\left(\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$ $(A \geq 0)$. Ekkor $R := \begin{cases} \frac{1}{A} & | 0 < A <^+ \infty \\ 0 & | A =^+ \infty \\ ^+\infty & | A = 0 \end{cases}$ a hatványsor konvergenciasugara.

Bizonyítás. A hányadoskritérium alapján. Példák:

1. $KH\left(\sum x^n\right) = (-1, 1)$ (± 1-ben divergens);
2. $KH\left(\sum \frac{x^n}{n^2}\right) = [-1, 1]$ (± 1-ben konvergens), ugyanis:
   - $R = 1$ esetén teljesül a gyök/hányídoskritérium;
   - $x = +1$-ben $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens;

- $x = -1$-ben $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ abszolút konvergens;

3. $KH\left(\sum \frac{x^n}{n}\right) = [-1, 1)$:
   - $R = 1\surd$;
   - $x = 1$-ben $\sum \frac{1}{n}$ divergens;
   - $x = -1$-ben $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens;
4. $KH\left(\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}\right) = (-1, 1]$;
5. $KH\left(\sum n^n x^n\right) = \{0\}$;
6. $KH\left(\sum \frac{x^n}{n^n}\right) = \mathbb{R}$.

$\square$

Analitikus függvények:

(Polinomok általánosításai)

4.22. definíció. Analitikus függvény:

Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív ($R > 0$). Ekkor az $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n$ $(x \in k_R(a))$ összegfüggvényt analítikus függvénynek nevezzük.

Műveletek hatványsorokkal:

- Két (ugyanolyan középpontú) hatványsor összege is hatványsor;
- Két hatványsor Téglány-szorzata nem hatványsor!
- Két hatványsor Cauchy-szorzata viszont hatványsor
  (ezért (is) fontos a Cauchy-szorzat).

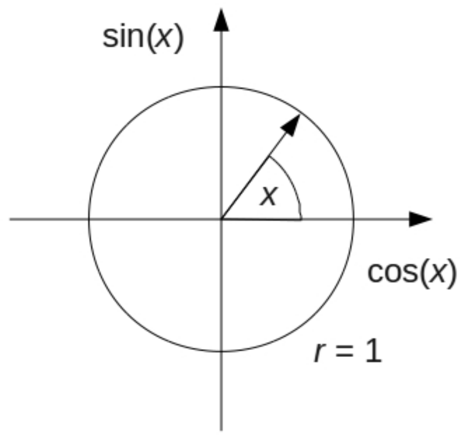
4.48. tétel. Hatványsorok műveleteire vonatkozó tételek:

Tegyük fel, hogy $\sum \alpha_n(x-a)^n$ és $\sum \beta_n(x-a)^n$ hatványsorok konvergenciasugaraira $R_\alpha > 0$, $R_\beta > 0$ teljesül. Tekintsük az összegfüggvényeket:

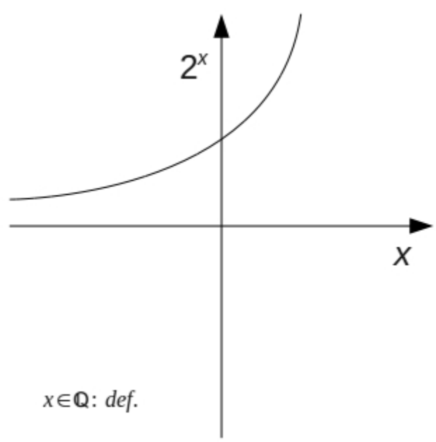
- $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n$ $(x \in k_{R_\alpha}(a))$;
- $g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x-a)^n$ $(x \in k_{R_\beta}(a))$.

Ekkor:

1. $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n + \beta_n)(x-a)^n,\ x \in k_R(a);\ R = \min\{R_\alpha, R_\beta\}$;
2. $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n(x-a)^n,\ x \in k_R(a);\ \gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_{n-i}$
   (azaz két hatványsor Cauchy-szorzatának az összege egyenlő az összegek szorzatával).



4.5. ábra. A sin, cos függvények



4.6. ábra. A 2^x függvény

Elemi függvények:

Megjegyzés: hatványsorok helyettesítési értékei „jól” számolhatók;

Emlékeztető: sin, cos (4.5. ábra), 2^x (4.6. ábra).

Megjegyzések:

- *A szemléletes definíció a* $\sin x$, $\cos x$ *számolására nem alkalmas;*
- *Ezeket hatványokra értelmezzük.*

4.23. definíció. Elemi függvények:

1. $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ (minden $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens (lásd.: a hányadoskritérium));
2. Trigonometrikus függvények:

(a) $\sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \; (\forall x \in \mathbb{R})$;

(b) $\cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \; (\forall x \in \mathbb{R})$;

(c) $\sinh(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \; (\forall x \in \mathbb{R})$ (szinusz-hiperbolikusz);

(d) $\cosh(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \; (\forall x \in \mathbb{R})$ (koszinusz-hiperbolikusz).

Elemi függvények tulajdonságai:

4.49. tétel. Az exponenciális függvény tulajdonságai:

Legyen $\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \; (x \in \mathbb{R})$. Ekkor:

1. $\exp(0) = 1$;
2. $\exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots = e$;
3. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \; (\forall x, y \in \mathbb{R})$ (sorok Cauchy-szorzatával);
4. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \; (\forall x \in \mathbb{R})$;
5. $\exp(x) > 0 \; (\forall x \in \mathbb{R})$.

Megjegyzés: 2-es miatt: $\exp(x) = e^x$ *(e-alapú exponenciális függvény).*

4.50. tétel. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

1. Paritás $(\forall x \in \mathbb{R})$:

   (a) $\left.\begin{array}{l}\cos(x) = \cos(-x)\\ \cosh(x) = \cosh(-x)\end{array}\right\}$ *páros függvények*;

   (b) $\left.\begin{array}{l}\sin(x) = -\sin(-x)\\ \sinh(x) = -\sinh(-x)\end{array}\right\}$ *páratlan függvények*;

2. Addíciós tételek $(\forall x, y \in \mathbb{R})$:

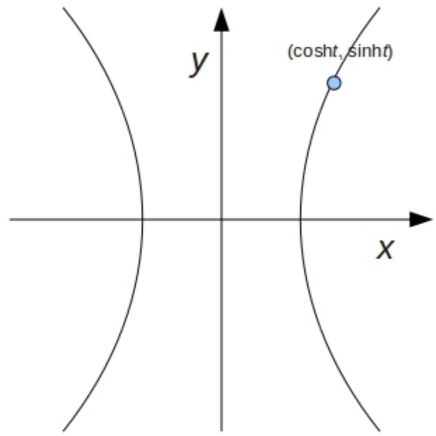
   (a) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;
   (b) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;
   (c) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$;
   (d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$;

   (hatványsorok Cauchy-szorzata);

3. Négyzetes összefüggések $(\forall x \in \mathbb{R})$:

   (a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
   (b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Megjegyzés: a sinh, cosh *függvények szemléltetése a 4.7. ábrán látható. Itt* $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ $(t \in \mathbb{R})$. *Ekkor* $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ *és* $x^2 - y^2 = 1$.



4.7. ábra. A sinh, cosh függvények

Függvények határértéke:

- Elnevezés: f valós-valós függvény: $D_f, R_f \subset \mathbb{R}$;
- Jelölés: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- Cél: függvények jellemzése, tulajdonságaik leírása (vessük össze a sorozatokkal);
- A határérték motivációja: a függvény adott pont körüli viselkedésének a leírása.

Megjegyzések:

- *Túl általános a problémafelvetés, de „kezelhető”;*
- *Példa:* $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;
  - *Kérdés: Mit lehet mondani* $\frac{\sin x}{x}$*-ről, ha* x *közel van a 0-hoz (kicsi számok hányadosa)?*
- *Néhány szemléletes példa látható a 4.8-4.9. ábrán.*

A határérték szemléletes tartalma:

A függvénynek az a pontban a határértéke A, ha az a-hoz közeli helyeken a függvényértékek A-hoz közel vannak. Jelölés: $\lim\limits_{a} f = A$.

A függvény határértékét a következő pontokban vizsgáljuk:

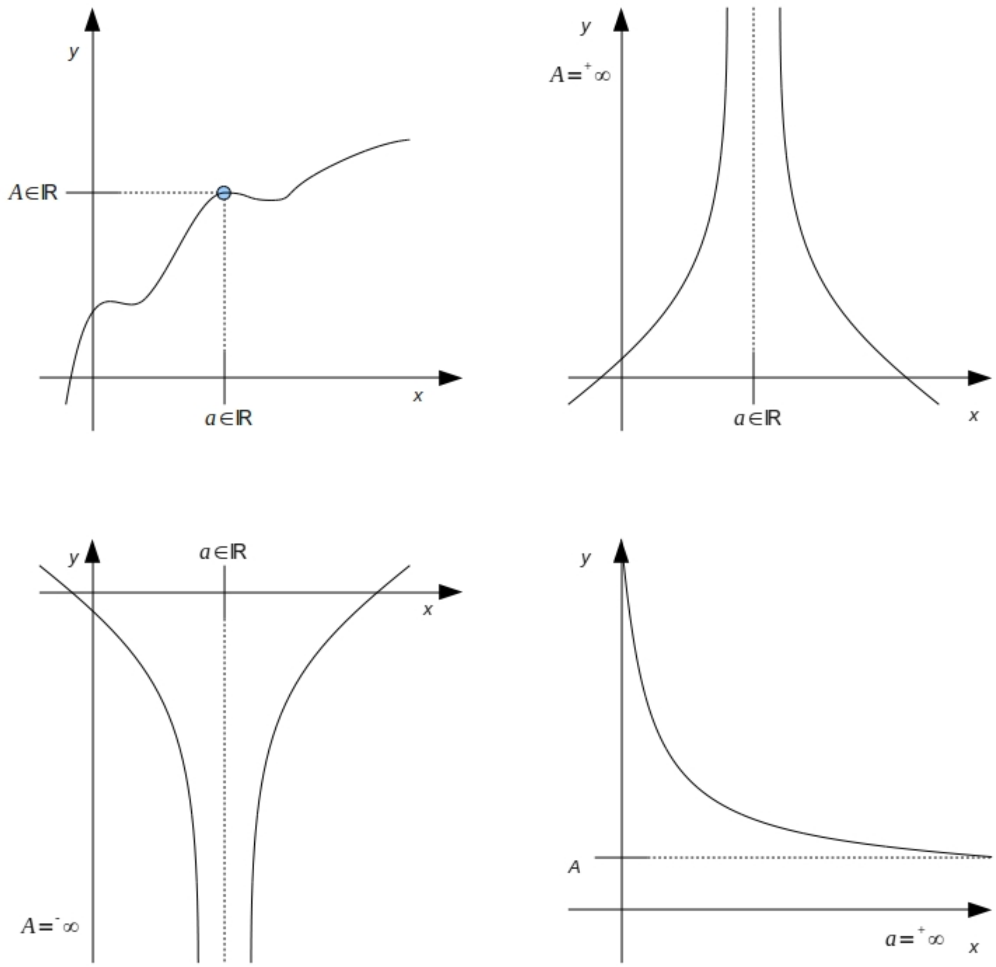
- $a \in \mathbb{R}$: végesben;
- $a =^{\pm} \infty$: végtelenben.

A függvény határértéke lehet:

- $A \in \mathbb{R}$: véges;
- $A =^{\pm} \infty$: végtelen.

Megjegyzések:

- *Minden párosítás lehetséges;*
- *9 esetet vizsgálhatunk (egységes definíció);*
- *A vizsgált a pontról feltesszük, hogy az a minden környezetében a függvény végtelen sok helyen értelmezve legyen! Ekkor a az* f *függvény értelmezési tartományának torlódási pontja.*



4.8. ábra. Szemléletes példák

Pontos részletek:
Emlékeztető - környezetek $\overline{\mathbb{R}}$-ban:

- $r > 0$;
- $a \in \mathbb{R}: \; k_r(a) := (a - r, \; a + r)$;
- $^{+}\infty: \; k_r\left(^{+}\infty\right) := \left(\frac{1}{r}, \; ^{+}\infty\right)$;
- $^{-}\infty: \; k_r\left(^{-}\infty\right) := \left(^{-}\infty, \; -\frac{1}{r}\right)$.

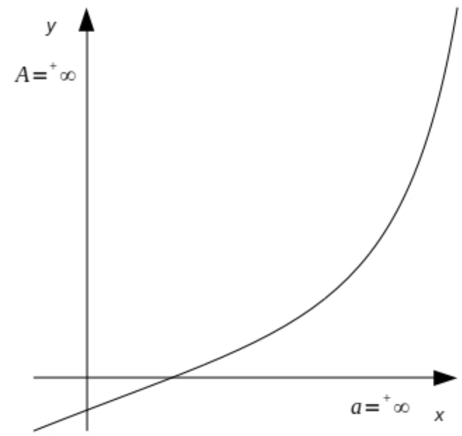
4.24. definíció. Torlódási pont:

Az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha $\forall r > 0$ esetén: $k_r(a) \cap H$ végtelen halmaz, azaz: az a minden környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz.

Jele: H' a H torlódási pontjainak a halmaza.

Megjegyzések:

1. *Az $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja H-nak, ha $\forall r > 0: \; (a - r, \; a + r) \cap H$ végtelen halmaz;*
2. *Az $a =^{+} \infty$ torlódási pontja H-nak, ha $\forall r > 0: \; \left(\frac{1}{r}, \; ^{+}\infty\right) \cap H$ végtelen halmaz;*



4.9. ábra. Szemléletes példa (folytatás)

3. *Az $a = ^- \infty$ torlódási pontja H-nak, ha $\forall r > 0: \left(^-\infty, -\frac{1}{r}\right) \cap H$ végtelen halmaz.*

Példák:

1. $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$;
2. $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$;
3. $\mathbb{Q}^{*'} = \overline{\mathbb{R}}$;
4. $(0,1)' = [0,1]$;
5. $\left\{\frac{1}{n} | n = 1, 2, \ldots\right\}' = \{0\}$;
6. $H \subset \mathbb{R}$ véges, $H' = \emptyset$;
7. $\mathbb{N}' = \{^+\infty\}$.

Megjegyzések:

- *Ha $a \in H'$, akkor a lehet is, meg nem is eleme a H-nak;*
- *A függvény határértékét az értelmezési tartományának torlódási pontjaiban vizsgáljuk: $a \in D'_f$, amiből az következik, hogy $a \in D_f$ és $a \notin D_f$ is lehetséges!*
  Határérték szempontjából a függvénynek az a-beli értéke nem játszik szerepet.

4.25. definíció. Általános definíció:

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $a \in D'_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $a \in D'_f$ pontban a határértéke az $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \cap (k_\delta(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in k_\varepsilon(A)$.

Jele: $\lim\limits_{a} f = A$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Megjegyzések:

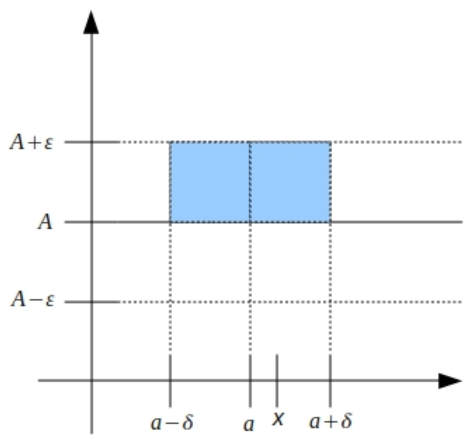
- *Szemléletesen: ha x közel van a-hoz, akkor $f(x)$ közel van A-hoz;*
- *Vessük össze a sorozatok határértékével: adott f függvény, $D_f = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}' = \left\{^+\infty\right\}$, $\lim\limits_{^+\infty} f = A$ ugyanaz, mint a sorozatok határértékének a korábbi definíciója.*

4.51. tétel. A határérték egyértelmű.

Bizonyítás. Indirekt módon: tegyük fel, hogy $\lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_a f = B \in \overline{\mathbb{R}}$ és $A \neq B$. Ekkor (igazolható) $\exists \varepsilon > 0: \ k_\varepsilon(A) \cap k_\varepsilon(B) = \emptyset$ $\left(pl.: 0 < A < B;\ \varepsilon = \frac{B-A}{4}\right)$, és $\lim\limits_a f = A \implies$ *ilyen* $\varepsilon -$ *hoz* $\exists \delta_1 > 0: \ \forall x \in D_f \cap (k_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}): \ f(x) \in k_\varepsilon(A)$. Ha $\lim\limits_a f = B$, akkor ε-hoz $\exists \delta_2 > 0: \ \forall x \in D_f \cap (k_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}): \ f(x) \in k_\varepsilon(B) \implies \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} \implies \forall x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D_f \implies f(x) \in k_\varepsilon(A) \cap k_\varepsilon(B)$, ami ellentmond annak, hogy $k_\varepsilon(A) \cap k_\varepsilon(B) = \emptyset$. □

4.26. definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Az a-ban f-nek van határértéke, ha $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}: \lim\limits_a f = A$. Speciális esetek:

1. Végesben vett véges határértékek ($a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$; 4.10. ábra): $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D_f \ (0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$;



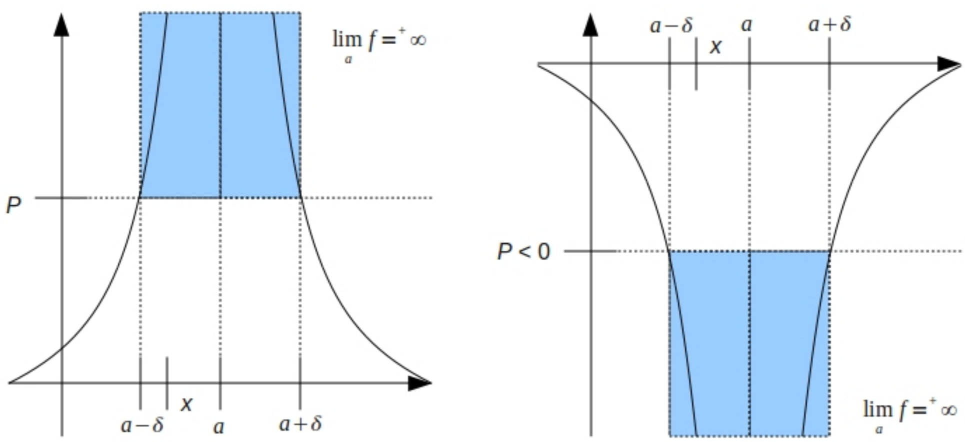
4.10. ábra. Végesben vett véges határértékek

2. Végesben vett végtelen határértékek ($a \in \mathbb{R}$, $A =^{\pm} \infty$; 4.11. ábra):
   (a) $\lim\limits_a f =^{+} \infty: \forall P > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D_f \ (0 < |x - a| < \delta): f(x) > P$;
   (b) $\lim\limits_a f =^{-} \infty: \forall P < 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D_f \ (0 < |x - a| < \delta): f(x) < P$;

3. Végtelenben vett véges határértékek ($a =^{\pm} \infty$, $A \in \mathbb{R}$; 4.12. ábra):
   (a) $a =^{+} \infty: \forall \varepsilon > 0: \exists x_0 > 0: \forall x > x_0 \ (x \in D_f): |f(x) - A| < \varepsilon$;
   (b) $a =^{-} \infty: \forall \varepsilon > 0: \exists x_0 < 0: \forall x < x_0 \ (x \in D_f): |f(x) - A| < \varepsilon$;

4. Végtelenben vett végtelen határértékek ($a =^{\pm} \infty$, $A =^{\pm} \infty$; 4.13. ábra):
   (a) $\lim\limits_{+\infty} f =^{+} \infty: \forall P > 0: \exists x_0 > 0: \forall x > x_0 \, (x \in D_f): f(x) > P$;
   (b) $\lim\limits_{+\infty} f =^{-} \infty: \forall P < 0: \exists x_0 > 0: \forall x > x_0 \, (x \in D_f): f(x) < P$;
   (c) $\lim\limits_{-\infty} f =^{+} \infty: \forall P > 0: \exists x_0 < 0: \forall x < x_0 \, (x \in D_f): f(x) > P$;
   (d) $\lim\limits_{-\infty} f =^{-} \infty: \forall P < 0: \exists x_0 < 0: \forall x < x_0 \, (x \in D_f): f(x) < P$.

Legyen $a \in D_f' \subset \mathbb{R}$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, és $\lim\limits_a f = A$.



4.11. ábra. Végesben vett végtelen határértékek

Átviteli elv:
A függvény határértéke a sorozat határértékével jellemezhető.

4.52. tétel. A határértékre vonatkozó átviteli elv:

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'_f$. Ekkor $\lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}} \iff (*)\, \forall (x_n): \mathbb{N} \to D_f \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ esetén a függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata A-hoz tart, azaz $\lim\limits_{n \to {}^+\infty} f(x_n) = A$.

Bizonyítás. $\boxed{\Longrightarrow}$: $\lim\limits_a f = A \implies (\#)\, \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D_f \cap (k_\delta(a) \setminus \{a\}): f(x) \in k_\varepsilon(A)$. Legyen $(x_n): \mathbb{N} \to D_f \setminus \{a\}$ és $\lim(x_n) = a$ tetszőleges.

Igazolnunk kell, hogy $f(x) \underset{n \to {}^+\infty}{\longrightarrow} A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor ($\#$ miatt) létezik olyan δ, amire $\#$ teljesül. Viszont $\lim(x_n) = a \implies \delta > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\, (n \in \mathbb{N}): x_n \in k_\delta(a)$, így ($\#$ miatt) $\forall n \geq n_0\, (n \in \mathbb{N}): f(x_n) \in k_\varepsilon(A) \implies \lim\limits_{n \to {}^+\infty} f(x_n) = A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Indirekt; tegyük fel, hogy (*) teljesül, de $\lim\limits_a f \neq A$. Ekkor ($\#$ tagadása) $\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0: \exists x_\delta \in D_f \cap (k_\delta(a) \setminus \{a\}): f(x_\delta) \notin k_\varepsilon(A)$. Legyen $\delta = \frac{1}{n}\, (\forall n): \exists x_n \in k_{\frac{1}{n}}(a): f(x_n) \notin k_\varepsilon(A)$. Mivel $\lim(x_n) = a$, ezért mindebből az következik, hogy $\exists (x_n): \mathbb{N} \to D_f \setminus \{a\}: \lim(x_n) = a$ és $f(x_n) \underset{n \to {}^+\infty}{\not\to} A$, ez pedig ellentmondás. ☐

4.53. tétel. Közrefogási elv:

Legyen $f, g, h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (D_f \cap D_g \cap D_h)'$, és tegyük fel, hogy $\exists k(a): f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ (\forall x \in k(a) \cap (D_f \cap D_g \cap D_h))$, továbbá $\exists \lim\limits_a f$, $\exists \lim\limits_a g$, és $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor $\exists \lim\limits_a h$ és $\lim\limits_a h = A$.

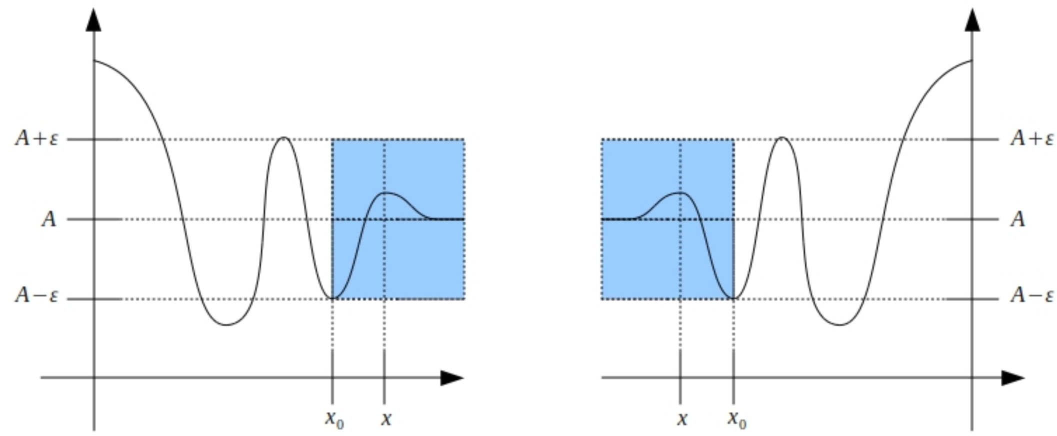
Bizonyítás. Az átviteli elv + sorozatokra a közrefogási elv alapján. ☐

4.54. tétel. Műveletek és a határérték kapcsolata:

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (D_f \cap D_g)'$, és

- $\exists \lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$;
- $\exists \lim\limits_a g = B \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor:



$\lim\limits_{+\infty} f = A$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{-\infty} f = A$

4.12. ábra. Végtelenben vett véges határértékek

1. $\exists \lim\limits_{a}(f+g)$, és $\lim\limits_{a}(f+g) = A+B$, ha $A+B$ értelmezve van;
2. $\exists \lim\limits_{a}(fg)$, és $\lim\limits_{a}(fg) = A \cdot B$, ha $A \cdot B$ értelmezve van;
3. $\exists \lim\limits_{a}\left(\frac{f}{g}\right)$, és $\lim\limits_{a}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}$, ha $\frac{A}{B}$ értelmezve van.

Megjegyzés: nem alkalmazható esetek, az ún. kritikus határértékek: $\left({}^{+}\infty\right) + \left({}^{-}\infty\right)$; $0 \cdot \left({}^{\pm}\infty\right)$; $\frac{{}^{\pm}\infty}{{}^{\pm}\infty}$; $\frac{0}{0}$.

Egyoldali határértékek:

Példa:

Tekintsük az ún. előjel (vagy szignum) függvényt (4.14. ábra):

$sign(x) := \begin{cases} 1 & |ha\, x > 0 \\ 0 & |ha\, x = 0 \\ -1 & |ha\, x < 0 \end{cases}$. Ekkor $\nexists \lim\limits_{0} sign$ (formális bizonyítás nélkül), de jobbról és balról „jól viselkedik” a függvény.

4.27. definíció. Jobboldali határérték:

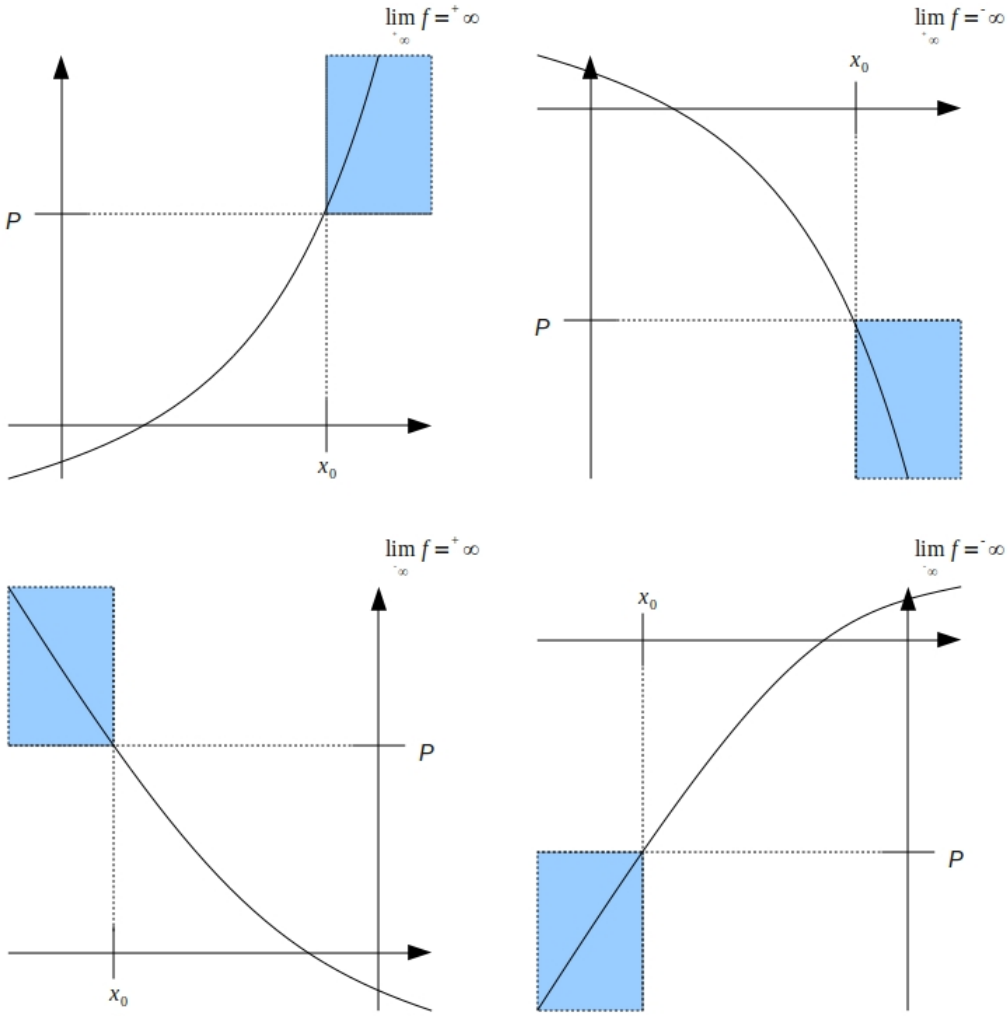
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in ((a, {}^{+}\infty) \cap D_f)'$, és legyen $g(x) := f(x)$ $(x \in (a, {}^{+}\infty) \cap D_f)$. Ekkor, ha $\exists \lim\limits_{a} g$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban jobbról létezik határértéke, és $\lim\limits_{a+0} f := \lim\limits_{a} g \in \overline{\mathbb{R}}$ (az f függvény a pontbeli jobboldali határértéke).

Jelölés: $\lim\limits_{x \to a+0}$; $f(a+0)$.

Megjegyzések:

- *A baloldali határértéket hasonlóan definiáljuk* $\left(\lim\limits_{a-0} f;\ \lim\limits_{x \to a-0} f(x);\ f(a-0)\right)$;
- $\nexists \lim\limits_{0} sign$, *de* $\lim\limits_{0+0} sign = 1$, $\lim\limits_{0-0} sign = -1$;
- $f(x) = \begin{cases} 0 & |ha\, x \in \mathbb{Q} \\ 1 & |ha\, x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$; $\nexists \lim\limits_{0} f$, $\nexists \lim\limits_{0 \pm 0} f$.

4.55. tétel. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f'$. Ekkor $\exists \lim\limits_{a} f \iff \exists \lim\limits_{a+0} f$, $\exists \lim\limits_{a-0} f$ *és* $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a-0} f$ $\left(= \lim\limits_{a} f\right)$.



4.13. ábra. Végtelenben vett végtelen határértékek

4.56. tétel. Nevezetes függvények határértéke:

1. Hatványfüggvények (4.15. ábra): $f(x) := x^n$ $(x \in \mathbb{R})$; $a \in D'_f = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$.

   Ezekben a pontokban vizsgáljuk a határértéket:

   (a) $\forall a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$;

   (b) $\lim\limits_{x \to {}^+\infty} x^n = {}^+\infty$;

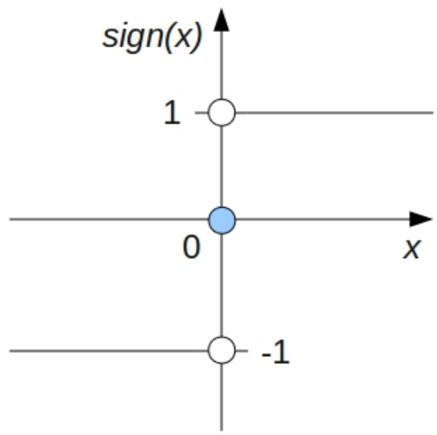
   (c) $\lim_{x \to {}^-\infty} x^n = \begin{cases} {}^+\infty & |ha\, n\, páros \\ {}^-\infty & |ha\, n\, páratlan \end{cases}$;

2. Reciprokfüggvény (4.16. ábra): $f(x) := \frac{1}{x^n}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n = 1, 2, \ldots)$

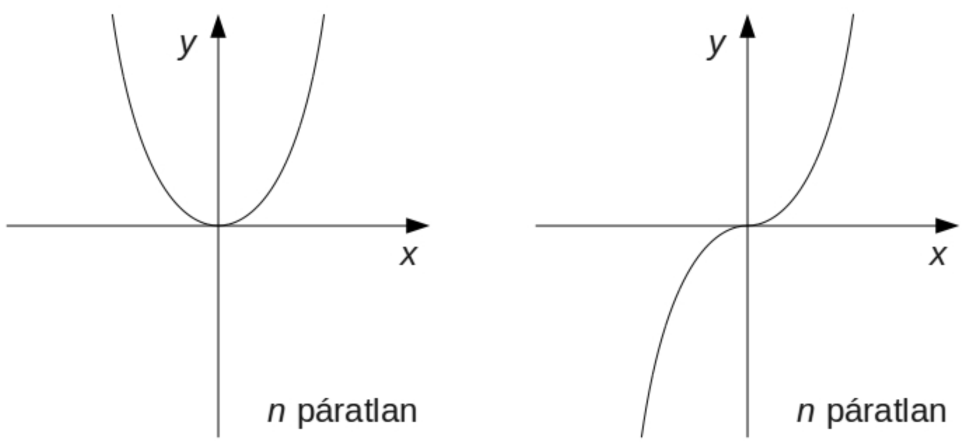
   A határérték vizsgálata: $a \in D'_f = (\mathbb{R} \setminus \{0\})' = \overline{\mathbb{R}}$:

   (a) $\forall a \in D_f : \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$;

   (b) $\lim\limits_{\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$;



4.14. ábra. A szignum függvény



4.15. ábra. Hatványfüggvények

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & |ha\, n\, páros \\ \nexists & |egyébként \end{cases}$

(d) De, ha n páratlan:

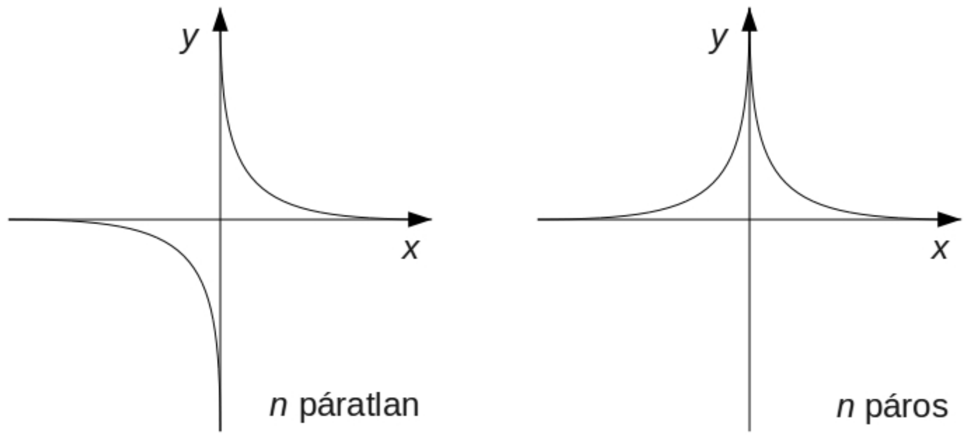
i. $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^n} =^+ \infty$;

ii. $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x^n} =^- \infty$;

3. Polinomok, racionális törtfüggvények:

- $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$;
- $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$;
- $R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{x|Q(x) = 0\})$
- $D'_R = \overline{\mathbb{R}}$

4.57. tétel. $\forall a \in D_R\ (Q(a) \neq 0): \lim\limits_{x\to a} R(x) = \frac{P(a)}{Q(a)}$.



4.16. ábra. Reciprokfüggvény

4. Analítikus függvények határértéke:

4.58. tétel. Tegyük fel, hogy $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara: $R > 0$. Legyen $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in k_R(a))$ az összegfüggvény. Ekkor $\forall b \in k_R(a)$ esetén $\exists \lim_b f$, és $\lim_b f = f(b)$.

5. Következmény: az exp, sin, cos, sinh, cosh függvényeknek $\forall a \in \mathbb{R}$ helyen van határértéke, és ez a határérték egyenlő a függvény helyettesítési értékével; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Bizonyítás. Igazolnunk kell, hogy $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f : 0 < |x| < \delta : \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Mivel $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ $(x \in \mathbb{R})$, és $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \ldots\right| \leq \underbrace{|x|^2}_{|x| \leq 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \ldots\right)}_{c} \leq c \cdot |x| < \varepsilon$, ezért $\varepsilon > 0$-hoz $0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{c}, 1\right\}$ esetén $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$, ha $0 < |x| < \delta$. □

6. Monoton függvények határértéke.

Függvények folytonossága:

Szemléletes jelentés (4.17. ábra):

4.28. definíció. Pontbeli folytonosság:

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in D_f$ pontban folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in D_f \cap k_\delta(a)}_{\forall x \in D_f :\, |x-a| < \delta} : f(x) \in \underbrace{k_\varepsilon(f(a))}_{|f(x)-f(a)| < \varepsilon}$.

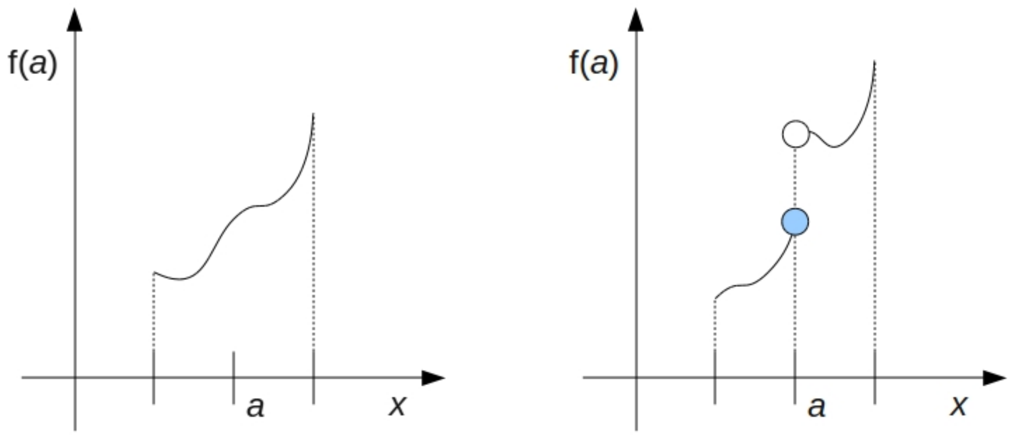
Jele: $f \in C\{a\}$.

Megjegyzés:

Csak értelmezési tartománybeli pontban definiáljuk a folytonosságot. Példák:

1. $f(x) := sign(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ *(4.18. ábra):* $f \notin C\{0\}$

2. $f(x) := \begin{cases} x & |ha\ x \in \mathbb{Q} \\ -x & |ha\ x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$ *(4.19. ábra):*



Folytonos függvény *Nem folytonos az a pontban*

4.17. ábra. Függvények folytonossága

- $f \in C\{0\}$;
- $f \notin C\{a\}$, *ha* $a \neq 0$.

4.59. tétel. A határérték és a folytonosság kapcsolata:

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f \cap D'_f$. Ekkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim_a f$ *és* $\lim_a f = f(a)$;

1. Ha $a \in D_f$ izolált pont (azaz $\exists k(a) :\ D_f \cap k(a) = \{a\}$), akkor $f \in C\{a\}$;
2. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz belsejének minden pontjában folytonos;
3. Az exp, sin, cos, sinh, cosh az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

4.60. tétel. Folytonosságra vonatkozó átviteli elv:

Tegyük fel, hogy adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Ekkor $f \in C\{a\} \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to D_f : \lim(x_n) = a$ esetén $f(x_n) \underset{n \to {}^+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Bizonyítás. Ha $a \in D_f \cap D'_f$, akkor teljesülnek a határérték és folytonosság kapcsolatára vonatkozó tétel, illetve a határértékre vonatkozó átviteli elv feltételei. Ha $a \in D_f$ és $a \notin D'_f$, akkor a a D_f izolált pontja. □

4.61. tétel. A műveletek és a folytonosság kapcsolata:

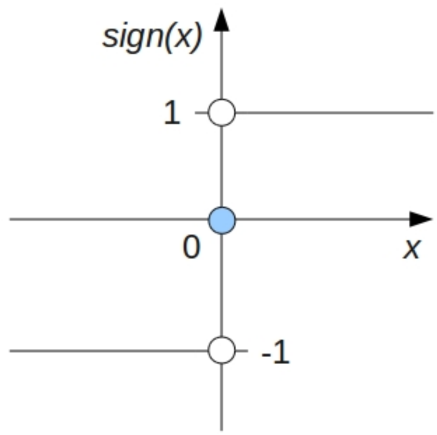
Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in C\{a\}$. Ekkor:

1. $\lambda f,\ f+g,\ f \cdot g,\ f/g\ \in C\{a\}$ ($\lambda \in \mathbb{R}'$, $g(a) \neq 0 :$ *ha* f/g *értelmezve van*);
2. Ha $R_g \subset D_f$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in C\{a\}$.

Halmazon folytonos függvények:

4.29. definíció. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $A \subset D_f$ halmazon, ha $\forall a \in A$ esetén $f \in C\{a\}$. Jelölés: $f \in C\{A\}$.

Megjegyzés: a műveleti tételek halmazon folytonos függvényekre is érvényesek, azaz: $f, g \in C\{a\}$ *helyett* $f, g \in C\{A\}$ *teljesül.*



4.18. ábra. A szignum függvény

Korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények további tulajdonságai:

4.62. tétel. Weierstrass tétele:

Ha adott $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}\,(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$ folytonos $[a,b]$-n, akkor f-nek van abszolút maximuma és minimuma, azaz: $\exists\alpha,\beta\in[a,b]:\ f(x)\le f(\alpha)\ \textit{és}\ f(\beta)\le f(x)\ \ (x\in[a,b])$.

Megjegyzések:

- $\left.\begin{array}{l}\alpha:\ \textit{abszolút maximumhely}\\ \beta:\ \textit{abszolút minimumhely}\end{array}\right\}\textit{abszolút szélsőértékek;}$
- $f(\alpha):$ *abszolút maximum;*
- $f(\beta):$ *abszolút minimum;*
- *A tétel feltételei lényegesek!*

Példák:

1. $f(x):=\frac{1}{x}\ \ (x\in(0,1))$ *(az értelmezési tartomány nem zárt; 4.20. ábra);*
2. $f(x):=x\ (x\in\mathbb{R})$ *(az értelmezési tartomány nem korlátos; 4.21. ábra);*
3. $f(x):=\begin{cases}x & |\textit{ha}\ x\in(-1,1)\\ 0 & |\textit{ha}\ x=\pm1\end{cases}$ *(f nem folytonos $[-1,1]$-en; 4.22. ábra);*

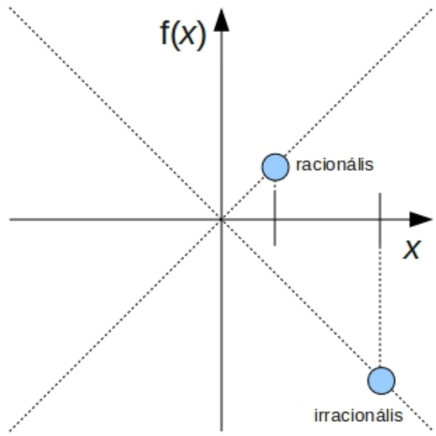
Bizonyítás. A bizonyításhoz először egy segédtételt kell kimondanunk és bizonyítanunk:

4.63. tétel. Segédtétel:

Ha adott $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, akkor f korlátos is $[a,b]$-n.

Bizonyítás. Indirekt: tegyük fel, hogy f nem korlátos, azaz: $\forall n\in\mathbb{N}:\ \exists x_n\in[a,b]:\ |f(x_n)|>n$. Ekkor $(x_n):\ \mathbb{N}\to[a,b]$ korlátos, amiből következik (a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján), hogy $\exists\,(x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $d:=\lim\,(x_{n_k})$. Ekkor $d\in[a,b]$ (indirekt módon igazolható), amiből az következik, hogy $f\in C\{d\}\underset{\textit{átviteli elv}}{\Longrightarrow}$ $x_{n_k}\to d\ \textit{és}\ (f\,(x_{n_k}))$ *konvergens*, amiből viszont az következik, hogy $(f\,(x_{n_k}))$ korlátos, ez viszont ellentmond az indirekt feltevésnek. □



4.19. ábra. Az $f(x) := \begin{cases} x & |ha\ x \in \mathbb{Q} \\ -x & |ha\ x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$ *függvény*

A tétel bizonyítása: ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor (a segédtétel alapján) f korlátos $[a,b]$-n:

- $\exists \sup \{f(x)\ |x \in [a,b]\} =: M \in \mathbb{R}$;
- $\exists \inf \{f(x)\ |x \in [a,b]\} =: m \in \mathbb{R}$.

Igazoljuk, hogy $\exists \alpha \in [a,b]:\ f(\alpha) = M$. DE M szuprémum, így (a szuprémum definíciója alapján) $(\#)$ $\forall n = 1,2,\ldots:\ \exists y_n \in R_f:\ M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$. Viszont $y_n \in R_f \implies \exists x_n \in [a,b]:\ f(x_n) = y_n \implies (x_n): \mathbb{N} \to [a,b]$ korlátos sorozat, amiből következik, hogy $\exists\,(x_{n_k})$ konvergens részsorozata. Jelölés: $\alpha := \lim\,(x_{n_k}) \in [a,b]$.

Az átviteli elv alapján $f \in C\,\{\alpha\}$-ból következik, hogy $\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} \to f(x)$. Másrészt $(\#)$-ből következik, hogy $y_{n_k} \to M$, így $f(\alpha) = M$. □

4.64. tétel. Bolzano tétele:

Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ folytonos $[a,b]$-n, $f(a) \cdot f(b) < 0$ (azaz a két végpontban f különböző előjelű). Ekkor $\exists \xi \in (a,b):\ f(\xi) = 0$.

A tétel szemléletes jelentése a 4.23. ábrán látható.

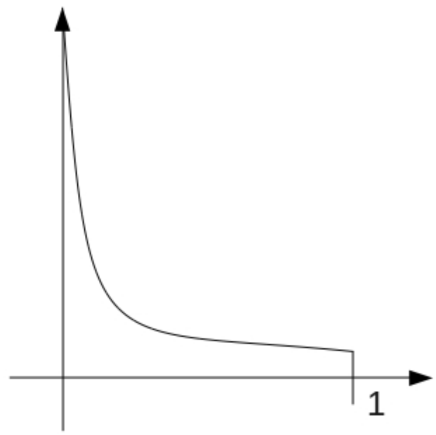
Bizonyítás. Bolzano-féle felezési eljárás:

Tegyük fel, hogy $f(a) < 0 \leq f(b)$ *és* $[x_0, y_0] = [a,b]$. Ezt most megfelezzük: $z_0 = \frac{a+b}{2}$. Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$;
2. $f(z_0) > 0$; $[x_1, y_1] = [a, z_0]$;
3. $f(z_0) < 0$; $[x_1, y_1] = [z_0, b]$.

$[x_1, y_1]$-et megfelezzük, és így tovább. Vagy véges sok lépésben találunk ξ-t, melyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben $\exists\,[x_n, y_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ infimum sorozat:

1. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$ $(n \in \mathbb{N})$;
2. A két végpontban a függvényértékek különbözők $(f(x_n) < 0,\ f(y_n) > 0)$;



Nincs abszolút szélsőérték!

4.20. ábra. Az $f(x) := \frac{1}{x}$ *függvény*

3. $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$.

A Cantor-tulajdonságból következik, hogy $\exists \xi \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n]$ és $x_n \leq \xi$, $y_n \geq \xi \in [a,b]$. Viszont $f \in C\{\xi\} \Longrightarrow$ $\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(\xi)$. 2-esből következik, hogy $f(x_n) < 0 \Longrightarrow \lim f(x_n) \leq 0$ és $f(y_n) > 0 \Longrightarrow \lim f(y_n) \geq 0$, ebből az következik, hogy $f(\xi) \geq 0$ és $f(\xi) \leq 0$, ebből pedig az következik, hogy $f(\xi) = 0$. □

Következmény:

Ha adott $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) folytonos $[a,b]$-n, akkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz.

Megjegyzések:

- *Például, ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall c \in (f(a), f(b)) : \exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = c$ (4.24. ábra)*

  Bizonyítás. *Legyen $\varphi(x) := f(x) - c$ ($x \in [a,b]$). Erre alkalmazzuk a Bolzano-tételt.* □

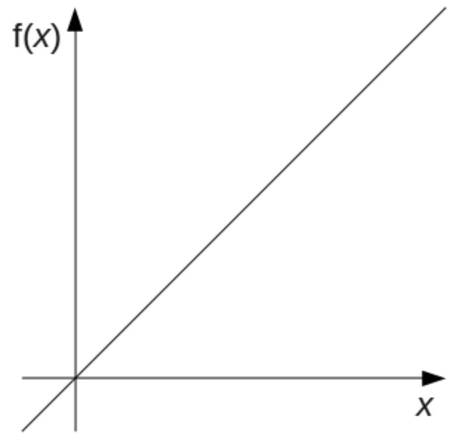
- *A tétel alkalmazásával az $f(x) = 0$ egyenlet közelítő megoldását lehet előállítani.*

Szakadási helyek osztályozása:

4.30. definíció. Szakadási hely:

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ekkor:

1. Az $a \in D_f$ az f függvény szakadási helye, ha f nem folytonos D_f-ben;
2. Az $a \in D_f$ az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény megszüntethető szakadási helye, ha $\exists \lim\limits_a f$ véges határérték, és $\lim\limits_a f \neq f(a)$;
3. Az $a \in D_f$ az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény elsőfajú szakadási helye, ha $\exists \lim\limits_{a+0} f = f(a+0)$, $\exists \lim\limits_{a-0} f = f(a-0)$, ezek végesek, de $\lim\limits_{a+0} f \neq \lim\limits_{a-0} f$. Ekkor azt is mondjuk, hogy f-nek az a-pontban ugrása van, és $f(a+0) - f(a-0)$ az f függvény a-beli ugrása;
4. Minden más esetben az $a \in D_f$ pontban az f függvénynek másodfajú szakadása van.



Nincs abszolút szélsőérték

4.21. ábra. Az $f(x) := x$ függvény

Példák:

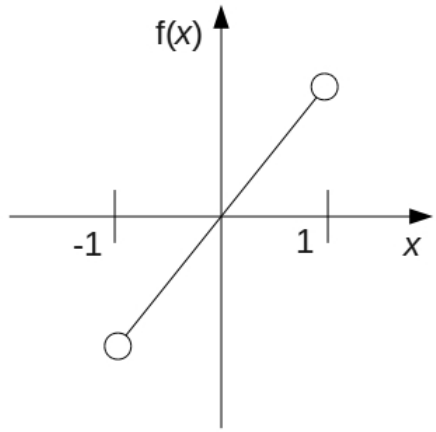
1. *Legyen* $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & |ha\ x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 0 & |ha\ x = 0 \end{cases}$. *Ekkor a* $0 \in D_f$ *megszüntethető szakadási hely;*
2. *Legyen* $f(x) := sign(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. *Ekkor a 0-pont elsőfajú szakadási hely, és az f függvénynek a 0-ban 2 ugrása van:* $2 = f(0+0) - f(0-0)$ *(4.25. ábra)*

Megjegyzés: sokféleképp lehet másodfajú szakadás; például: $f(x) := \begin{cases} 0 & |ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & |ha\ x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$. *Ekkor* $\nexists f(0+0)$, $\nexists f(0-0)$.

4.65. tétel. Monoton függvények szakadási helyei:

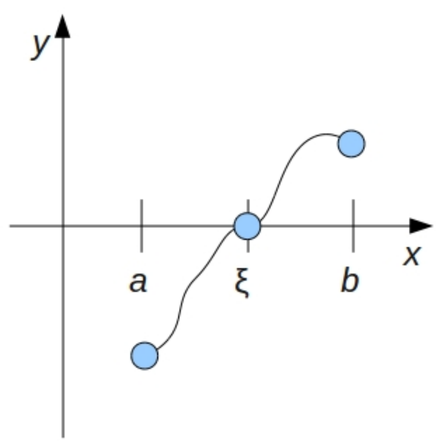
Tetszőleges $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadási helyei lehetnek, azaz: tetszőleges $a \in (a, b)$ pontban az f függvény vagy folytonos, vagy elsőfajú szakadási helye (ugrása) van.

Bizonyítás. Monoton függvények határértékére. $\square$

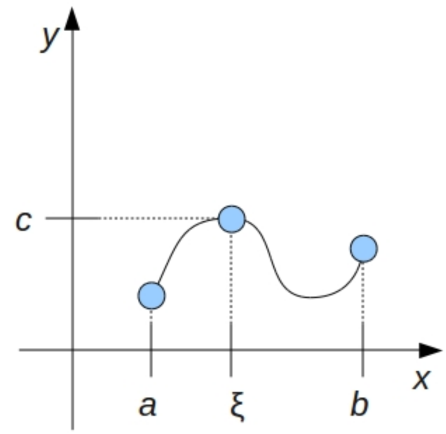


Nincs abszolút szélsőérték!

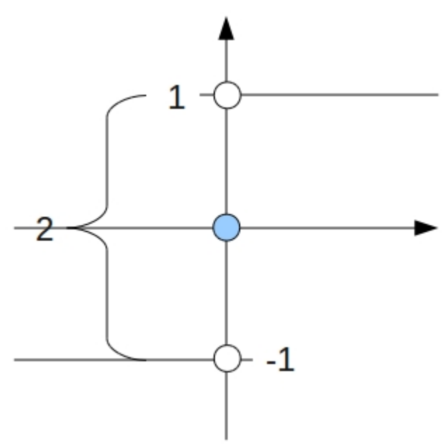
4.22. ábra. *Az* $f(x) := \begin{cases} x & |ha\; x \in (-1,1) \\ 0 & |ha\; x = \pm 1 \end{cases}$ *függvény*



4.23. ábra. Bolzano tételének szemléletes jelentése



4.24. ábra. Példa a Bolzano-tétel alkalmazására



4.25. ábra. A szignum függvény szakadási helye