Analízis III.

Kidolgozott tételsor

Kidolgozta: Ábrahám Róbert
Dr. Szili László előadásai alapján

2011. június 16.

I. rész

Vizsgakérdések

1. Definiálja a metrikus teret.

Az (M, S) rendezett párt metrikus térnek (MT) nevezzük, ha:

1. $M \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz,
2. $S: M \times M \to \mathbb{R}$ olyan függvény (vagy metrika), amelyre:
   (a) $S(x, y) \geq 0$;
   (b) $S(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
   (c) $S(x, y) = S(y, x)$ (szimmetrikus);
   (d) $S(x, y) \leq S(x, z) + S(z, y)$ (háromszög-egyenlőtlenség)

$\forall x, y, z \in M$ esetén.

$S(x, y)$ szám: x és y távolsága.

2. Mi a diszkrét metrikus tér definíciója?

Egy (M, S) metrikus teret diszkrét metrikus térnek nevezünk, ha $M \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz esetén

$$S(x, y) := \begin{cases} 0, & ha\, x = y \\ 1, & ha\, x \neq y \end{cases}.$$

Ekkor $S: M \times M \to \mathbb{R}$ metrika.

3. Hogyan értelmeztük az $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ metrikus teret?

Az $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ olyan metrikus tér, ahol $\varrho_1(x, y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \;\; (x, y \in \mathbb{R}^n)$.

4. Hogyan értelmeztük az $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$ metrikus teret?

Az $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$ olyan metrikus tér, ahol:

- $1 \le p < +\infty: \ \varrho_p(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n);$
- $p = +\infty: \ \varrho_\infty(x,y) := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k|.$

Megjegyzések:

- *$p = 1$ esetén a definíció megegyezik az előző definícióval;*
- *$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ rögzített elem esetén igazolható, hogy $\lim_{p \to +\infty} \varrho_p(x,y) = \varrho_\infty(x,y)$;*
- *$p = 2$ esetén $\varrho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$ euklideszi metrika $\mathbb{R}^n$-en;*
- *A definíciónak $0 < p < 1$ esetén is van értelme, de ekkor a háromszög-egyenlőtlenség nem igaz!*

5. Hogyan értelmeztük a $(C[a,b], \varrho_2)$ metrikus teret?

Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, $C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \ folytonos\}$. Ekkor a $(C[a,b], \varrho_2)$ metrikus tér, ahol $\varrho_2(f,g) := \sqrt{\int_a^b |f-g|^2} \ (f, g \in C[a,b])$.

6. Hogyan értelmeztük a $(C[a,b], \varrho_\infty)$ metrikus teret?

Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, $C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \ folytonos\}$. Ekkor a $(C[a,b], \varrho_\infty)$ metrikus tér, ahol $\varrho_\infty(f,g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \ (f, g \in C[a,b])$.

Megjegyzés: igazolható, hogy $\varrho_\infty(f,g) = \lim_{p \to +\infty} \varrho_p(f,g)$ (ϱ_p definíciója a 7. kérdésben).

7. Hogyan értelmeztük a $(C[a,b], \varrho_p)$ metrikus tereket?

Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, $C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \ folytonos\}$, $1 \le p \le +\infty$. Ekkor a $(C[a,b], \varrho_p)$ metrikus tér, ahol:

1. $1 \le p < +\infty: \ \varrho_p(f,g) := \sqrt[p]{\int_a^b |f-g|^p} \ (f, g \in C[a,b]);$
2. $p = +\infty: \ \varrho_\infty(f,g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \ (f, g \in C[a,b]).$

Megjegyzés: $\varrho_\infty(f,g) = \lim_{p \to +\infty} \varrho_p(f,g)$ igazolható.

8. Fogalmazza meg a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget!

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Ekkor $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

- $b_1, b_2, \ldots, b_n = 0$, a_k tetszőleges,
- $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \; a_k = \lambda b_k \; (k = 1, 2, \ldots, n)$,

azaz $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan összefüggők.

9. Mit jelent az, hogy az (M, ϱ) metrikus térbeli (a_n) sorozat határértéke $\alpha \in M$?

Az (M, ϱ) metrikus tér egy $(a_n) : \mathbb{N} \to M$ sorozatának határértéke $\alpha \in M$, ha $\forall \varepsilon > 0 : \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_0 :$ $\varrho(a_n, \alpha) < \varepsilon$.

Megjegyzések:

- *$M = \mathbb{R}$ esetben a definíció ugyanaz, mint a régi definíció ($\varrho(x, y) = |x - y|$);*
- *A definíció igen általános.*

10. Írja le a normált tér definícióját!

Az $(X, \|.\|)$ rendezett pár normált tér, ha:

1. X lineáris tér $\mathbb{R}$ felett;
2. $\|.\| : \; X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre:
   (a) $\|x\| \geq 0 \; (\forall x \in X)$;
   (b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (x az X nulleleme);
   (c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \; (\forall x \in X, \; \lambda \in \mathbb{R})$;
   (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; (\forall x, y \in X)$.

$\|.\|$: normafüggvény, $\|x\|$ szám az x elem normája.

11. Definiálja $\mathbb{R}^n$-en a $\|.\|_p$ normákat.

Adott $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ normált tér. Ekkor:

- $1 \leq p < +\infty : \; \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $p = +\infty : \; \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$;

$(x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$.

12. Milyen normákat értelmeztünk a $C[a,b]$ függvénytéren?

Adott $(C[a,b], \|.\|_p)$ normált tér, ahol $f \in C[a,b]$. Ekkor:

- $1 \leq p < +\infty$: $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $p = +\infty$: $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \; |x \in [a,b]\}$.

Megjegyzés:

- *$\|f\|_p$ „jól definiált", ugyanis:*
  - *$1 \leq p < +\infty$: minden folytonos függvény integrálható;*
  - *$p = +\infty$: Weierstrass-tétel.*

13. Hogyan értelmezzük normált térben egy pont környezetét?

Adott $(X, \|.\|)$, $a \in X$, $r > 0$. Ekkor a $k_r(a) := \overset{\|.\|}{k_r}(a) := \{x \in X \mid \|x - a\| < r\}$ az a pont r sugarú környezete (az 'a' középpontú, 'r' sugarú, nyílt gömb).

14. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli sorozat konvergens?

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ sorozat konvergens, ha $\exists \alpha \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \|a_n - \alpha\| < \varepsilon$.

15. Milyen ekvivalens átfogalmazásokat ismer normált térbeli sorozat konvergenciájára?

Legyen $(a_n) \subset (X, \|.\|)$ egy sorozat. Ekkor (a_n) konvergens $\Longleftrightarrow$ $(\exists \alpha \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \in k_\varepsilon(\alpha)) \Longleftrightarrow$ $\left(\exists \alpha \in X : \lim\limits_{n \to +\infty} \|\alpha - a_n\| = 0\right)$.

Elnevezés, jelölés:

- α: a sorozat határértéke (h.é.);
- $\lim(a_n) := \lim\limits_{n \to +\infty} a_n := \alpha$;
- $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|.\|} \alpha$.

16. Fogalmazza meg normált térbeli konvergens sorozatok alaptulajdonságait.

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér és $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ sorozat.

1. Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = \alpha$. Ekkor:

(a) α egyértelműen meghatározott;

(b) (a_n) korlátos sorozat;

(c) $\forall(\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő indexsorozat esetén (a_{ν_n}) részsorozat konvergens és $\lim_{n\to+\infty}(a_{\nu_n}) = \lim_{n\to+\infty}(a_n)$;

2. Ha van 2 különböző elemhez tartozó részsorozata (a_n)-nek, akkor (a_n) divergens (ez a (c)-ből következik).

17. Milyen műveleti tételeket ismer normált térbeli konvergens sorozatokra?

Legyen $(X, \|.\|)$ tetszőleges normált tér. Tegyük fel, hogy $a_n \to \alpha$, $(\lambda_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\lambda_n \to \lambda$, $b_n \to \beta$. Ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ konvergens X-ben és $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|} \alpha + \beta$;
2. $(\lambda_n a_n)$ konvergens $(X, \|.\|)$-ben és $\lambda_n \cdot a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|} \lambda \cdot \alpha$.

Megjegyzések:

- *A konvergencia függ a normától!*
- *Ugyanazon a halmazon többféle norma is értelmezhető!*
- *Elképzelhető, hogy van olyan $(X, \|.\|_1)$ és $(X, \|.\|_2)$ normált tér, hogy egy $(a_n) \subset X$ az egyik normában konvergens, a másikban pedig divergens!*
- *Kedvezőbb a helyzet, ha csak az ún. ekvivalens normákra szorítkozunk.*

18. Mit jelent az, hogy két norma ekvivalens?

Tegyük fel, hogy X lineáris tér $\mathbb{R}$ felett és $\|.\|_1$ és $\|.\|_2$ normák X-en. A két norma ekvivalens (jelölésben: $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$), ha $\exists m, M > 0 :\ m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1 \ \ (\forall x \in X)$.

19. Hogyan jellemezhető $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergenciája a koordinátasorozatokkal?

Tekintsük $\mathbb{R}^n$-et, legyen $\|.\|$ egy tetszőleges norma, $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $a_k = \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az (a_k) sorozat konvergens és $\lim_{k\to+\infty}(a_k) \stackrel{\|.\|}{=} \alpha = \left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor, ha $\forall i = 1, 2, \ldots, n$: az $\underbrace{\left(a_k^{(i)}\right)_{k\in\mathbb{N}}}_{i-\text{edik koordináta}-\text{sorozat}}$ valós sorozat konvergens és $\lim_{k\to+\infty}\left(a_k^{(i)}\right) = \alpha^{(i)}$.

Megjegyzés: $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergenciájának vizsgálata visszavezethető $\mathbb{R}$-beli sorozat konvergenciájának vizsgálatára.

20. Mit jelent az, hogy egy normált térbeli sorozat Cauchy-sorozat?

Az $(X, \|.\|)$ normált térben az $a_n : \mathbb{N} \to X$ sorozat Cauchy-sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : \|a_n - a_m\| < \varepsilon$.

Megjegyzés: szemléletesen, a „nagy” indexű tagok „közel” vannak egymáshoz.

21. Milyen kapcsolat van normált térben a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok között?

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér és $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ sorozat. Ekkor:

1. Ha (a_n) konvergens, akkor (a_n) Cauchy-sorozat;
2. Visszafelé a tétel nem igaz!

22. Mit jelent az, hogy egy normált tér teljes?

Az $(X, \|.\|)$ normált tér teljes normált tér (vagy Banach-tér), ha teljesül a Cauchy-konvergencia-kritérium, tehát $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ konvergens $\iff$ (a_n) Cauchy-sorozat.

Példák:

1. *$(\mathbb{R}, \overset{szokásos}{|.|})$ Banach-tér;*
2. *$(\mathbb{Q}, |.|)$ nem Banach-tér.*

23. Definiálja a belső pont fogalmát.

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér, $A \subset X$. Az $a \in A$ az A halmaz belső pontja, ha $\exists k(a) : k(a) \subset A$. Jelölés: $\underset{\overset{\uparrow}{interior}}{int}\ A$: a belső pontok halmaza.

24. Mi a nyílt halmaz definíciója?

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér, $A \subset X$. Az A nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont.

25. Milyen állításokat ismer zárt halmaz jellemzésére?

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér, $A \subset X$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $A \subset (X, \|.\|)$ zárt;
2. $A' \subset A$;
3. Tetszőleges olyan $(a_n) : \mathbb{N} \to A$ sorozatra, amelyik konvergens $\lim(a_n) = \alpha \in A$.

26. Mi a kompakt halmaz definíciója?

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér. Az $A \subset X$ kompakt halmaz, ha $\forall (x_n) : \mathbb{N} \to A$ sorozathoz $\exists\, (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat úgy, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens és $\lim (x_{\nu_n}) \in A$.

27. Milyen szükséges, illetve szükséges és elégséges feltételeket ismer a kompaktságra?

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér, $A \subset X$. Ekkor:

1. $A \subset X$ pontosan akkor kompakt, ha minden végtelen részhalmazának van A-beli torlódási pontja;
2. Ha $A \subset X$ kompakt, akkor az A zárt X-ben;
3. Ha $A \subset X$ kompakt, akkor A korlátos X-ben;
4. Ha $A \subset X$ korlátos és zárt X-ben, abból általában nem következik, hogy A kompakt (de ha $\dim X < \infty$, akkor következik).

28. Fogalmazza meg a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt.

Adott $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ ($\|.\|$ tetszőleges norma). Ekkor igaz a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel, azaz: $\forall (x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

29. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer $\mathbb{R}^n$-ben a kompaktságra?

Adott $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n,\ \|.\|)$ ($\|.\|$ tetszőleges norma). Ekkor az $A \subset (\mathbb{R}^n,\ \|.\|)$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha A korlátos és zárt halmaz.

30. Definiálja normált terek közötti leképezések pontbeli folytonosságát.

Legyenek adottak $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek, $f \in X \to Y$, $a \in D_f$. Az f függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban (jelölés: $f \in C\{a\}$), ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in \overbrace{k_\delta(a) \cap D_f}^{\overset{X}{\cup}}}_{\overset{\Updownarrow}{\|x-a\|_X < \delta}} : \underbrace{f(x) \in \overbrace{k_\varepsilon(f(a))}^{\overset{Y}{\cup}}}_{\overset{\Updownarrow}{\|f(x)-f(a)\|_Y < \varepsilon}}$.

Megjegyzés: a folytonosság függ a normától, de ekvivalens normák esetén nem!

31. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Adottak $(X, \|.\|_x)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek, $f \in X \to Y$, $a \in D_f$. Ekkor $f \in C\{a\} \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to D_f$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) \overset{\|.\|_X}{=} a : \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \overset{\|.\|_Y}{=} f(a)$.

32. Sorolja fel kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságait.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ és $\underbrace{D_f \subset \mathbb{R}^n\ kompakt}_{(1)}$, $\underbrace{f\ folytonos\ (D_f - en)}_{(2)}$. Ekkor:

1. $R_f \subset \mathbb{R}^m$ kompakt (kompakt halmaz folytonos képe kompakt);
2. Weierstrass-tétel: ha $m = 1$ (valós értékű függvény), akkor:
   (a) $\exists \max f$ ($\iff \max R_f$);
   (b) $\exists \min f$ ($\iff \min R_f$);
3. Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injektív is, akkor f^{-1} is folytonos.

33. Írja le az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény pontbeli deriválhatóságának a definícióját.

Adott $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ függvény, $a \in int\, D_f$ pont. Az f függvény (totálisan) deriválható az a pontban, ha $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m):\ \lim\limits_{h \to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|^{(1) \leftarrow \mathbb{R}^m - beli\ tetsz\H{o}leges\ norma}}{\|h\|^{(2) \leftarrow \mathbb{R}^n - beli\ tetsz\H{o}leges\ norma}} = 0$. Az f függvény a-beli deriváltja: $f'(a) = L$. Jelölés: $f \in D\{a\}$.

34. Mit jelent az, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban?

Adott $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvény, $a \in int\, D_f$ pont. Az f függvény totálisan deriválható az a pontban, ha $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}):\ \lim\limits_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-L(h)|}{\|h\|^{(\#) \leftarrow \mathbb{R}^n - beli\ tetsz\H{o}leges\ norma}} = 0$. Az f függvény a-beli deriváltja: $f'(a) = L$. Jelölés: $f \in D\{a\}$.

35. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

Adott $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$. Ekkor $f \in D\{a\} \iff \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lim\limits_0 \varepsilon = 0 :$ $f(a+h) - f(a) = L(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$ $(\forall h \in \mathbb{R}^n : a + h \in D_f)$.

36. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra mátrixokkal?

Adott $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$. Ekkor:

1. $f \in D\{a\} \iff \exists A \in \mathbb{R}^{m \times n} :\ \lim\limits_{h \to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-A \cdot h\|^{(1)}}{\|h\|^{(2)}} = 0$;
2. $f \in D\{a\} \iff \exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\exists \varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lim\limits_0 \varepsilon = 0 :$ $f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^{(2)}$ $(\forall a + h \in D_f)$.

Megjegyzés: a deriválhatóság a definíció alapján is vizsgálható.

37. Milyen kapcsolat van a pontbeli deriválhatóság és folytonosság között?

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$. Ekkor:

1. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $f \in C\{a\}$;
2. A megfordítás nem igaz $(n = m = 1)$;
   Példa: $f(x) = \|x\|$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Ekkor $f(x)$ 0-ban folytonos, de nem deriválható!

38. Fogalmazza meg a láncszabályt.

Legyen $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in int\, D_g$, $g \in D\{a\}$, $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, $f \in D(g(a))$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

A jegyzetben ezt nem találtam sehol, de a neten végül megtaláltam valahol.

39. Milyen tételt ismer a deriváltmátrix előállítására?

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$, $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ koordináta-függvények.

Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\forall j = 1, 2, \ldots, m$ és $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ esetén a $\partial_i f_j(a)$ parciális deriváltak léteznek, és $f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \cdots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ deriváltmátrix vagy Jacobi-mátrix.

40. Adja meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény parciális deriváltjainak a fogalmát.

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$, $e_1, \ldots, e_n$ kanonikus egységvektorok. Az f függvénynek létezik az i. változó szerinti parciális deriváltja az $a = (a_1, \ldots, a_n)$ pontban, ha $k(0) \ni t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ valós-valós függvény deriválható 0-ban: $F \in D\{0\}$.

Az $F'(0)$ szám az f függvény i-edik változó szerinti parciális deriváltja a-ban. Jelölés: $\partial_i f(a) := F'(0)$.

41. Milyen elégséges feltételt ismer a totális deriválhatóságra a parciális deriváltakkal?

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$, $f \in k(a) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ esetén:

1. A $\partial_i f(x)$ parciális derivált függvények léteznek $\forall x \in k(a)$-ban;
2. A $\partial_i f:\ k(a) \to \mathbb{R},\ x \to \partial_i f(x)$ parciális derivált függvények folytonosak az $a \in int\, D_f$ pontban.

Ekkor az $f \in D\{a\}$.

42. Definiálja az iránymenti deriváltat.

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$, $e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor $(\|e\|_2 = 1)$. Az f függvénynek az $a \in int\, D_f$ pontban létezik az e irányban vett iránymenti deriváltja, ha az $F:\ k(0) \ni t \mapsto f(a + t \cdot e)\ /\in \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1/$ deriválható 0-ban $(F \in D\{0\})$. Ekkor $F'(0)$ szám az f függvény e irányú deriváltja az a-ban: $F'(0) =: \partial_e f(a)$.

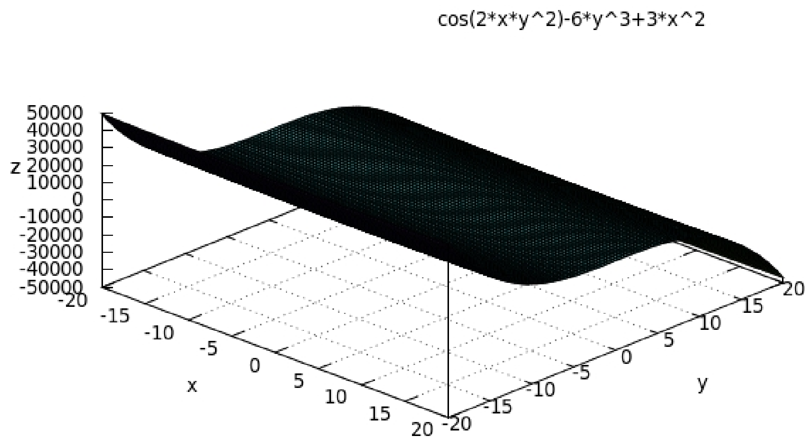
Megjegyzés: a parciális derivált általánosítása, ugyanis ha $e := e_i$ kanonikus egységvektor, akkor $\partial_e f = \partial_i f$.

43. Milyen képletet ismer az iránymenti derivált kiszámolására?

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $f \in D\{a\}$, akkor $\forall e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor $(\|e\|_2 = 1)$ esetén $\exists \partial_e f(a)$ és $\partial_e f(a) = f'(a) \cdot e = \langle f'(a), e \rangle$.

Megjegyzés: lényeges, hogy $\|e\|_{(2)} = 1$.

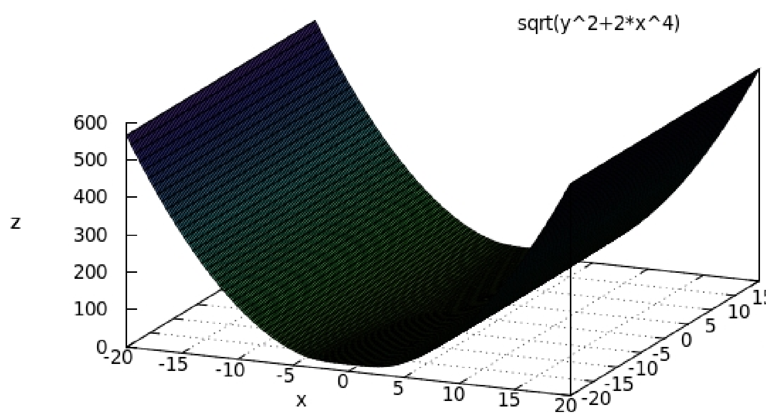
44. Legyen $f(x,y) := 3x^2 - 6y^3 + \cos(2xy^2)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Számítsa ki $\partial_2 f(1,2)$-t.



1. ábra. Az $f(x,y) := 3x^2 - 6y^3 + \cos(2xy^2)$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ függvény ábrázolása

Megoldás: $\partial_2 f(x,y) = -18y^2 + (-\sin(2xy^2)) \cdot 4xy$. Behelyettesítve: $\partial_2 f(1,2) = -18 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin(2 \cdot 1 \cdot 4) = \underline{\underline{-72 - 8 \cdot \sin 8}}$.

45. Legyen $f(x,y) := \sqrt{(2x^4 + y^2)}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Számítsa ki $\partial_1 f(0,1)$-t.



2. ábra. Az $f(x,y) := \sqrt{(2x^4 + y^2)}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ függvény ábrázolása

Megoldás: $\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{2}\left(2x^4 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x^3 = \left(2x^4 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3$. Behelyettesítve: $\partial_1 f(0,1) = \left(2 \cdot 0^4 + 1^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot 0^3 = \underline{\underline{0}}$.

46. Mit jelent az, hogy egy függvény kétszer deriválható egy pontban?

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$. Az f függvény kétszer deriválható az a-ban ($f \in D^2\{a\}$), ha:

1. $\exists k(a) \subset D_f : f \in D(k(a))$;
2. $\forall i = 1, 2, \ldots, n : \partial_i f \in D\{a\}$ /a parciális derivált függvények deriválhatók a-ban/.

Megjegyzések:

- $1 \Longleftrightarrow \forall x \in k(a) : \exists f'(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$
  $f' : k(a) \to \mathbb{R}^n$ *deriváltfüggvény;*
- $\partial_i f \in D\{a\}$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)$
  $f' \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f''(a) := (f')'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
  $$f''(a) := \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \partial_2\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_1 f(a) \\ \partial_1\partial_2 f(a) & \partial_2\partial_2 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(a) & \partial_2\partial_n f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{bmatrix}}_{Hesse-féle\ mátrix}.$$

47. Fogalmazza meg a Young-tételt.

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$ és tegyük fel, hogy $f \in D^2\{a\}$. Ekkor $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n : \partial_j(\partial_i f)(a) = \partial_i(\partial_j f)(a)$ (azaz a vegyes parciális deriváltak megegyeznek).

Megjegyzés: általánosítható: $f \in D^2\{a\}$.

Következmény: ha $f \in D^2\{a\}$, akkor a Hesse-mátrix szimmetrikus.

Megjegyzés: lényeges, hogy $f \in D^2\{a\}$.

48. Adja meg a Taylor-polinom definícióját.

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $f \in D^m(k(a))$ (de elég $f \in D^m(a)$ is).

$(T_{m,a}f)(x) = (T_{m,a}f)(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i \right)$ az f függvény a-hoz tartozó, m-edrendű, n-változós Taylor-polinomja.

Megjegyzés: nem az „igazi” általánosítása az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$-nek!

49. Milyen képletet ismer az elsőfokú, n-változós Taylor-polinomra?

Legyen $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor: $(T_{1,a}f)(x) = (T_{1,a}f)(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h \rangle = f(a) + \partial_1 f(a)h_1 + \ldots + \partial_n f(a)h_n$.

50. Milyen képletet ismer a másodfokú, n-változós Taylor-polinomra?

Legyen $m = 2$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $(T_{2,a}f)(x) = (T_{2,a}f)(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(a) \cdot h, h \rangle$, ahol $f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \partial_2\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_1 f(a) \\ \partial_1\partial_2 f(a) & \partial_2\partial_2 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(a) & \partial_2\partial_n f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{bmatrix}$ Hesse-mátrix.

51. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal.

Tegyük fel, hogy:

1. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$;
2. $[a, a+h] := \{a + t \cdot h \,|t \in [0,1]\} \subset D_f$;
3. $f \in D^{m+1}([a, a+h]),\ m \in \mathbb{N}$.

Ekkor $\exists \nu \in [0,1] :\ f(a+h) = f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i \right)}_{(T_{m,a}f)(a+h)} + \underbrace{\sum_{|i|=m+1} \frac{\partial^i f(a+\nu h)}{i!} h^i}_{Lagrange-féle\ maradéktag}$.

52. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Peano-féle maradéktaggal.

Tegyük fel, hogy:

1. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$;
2. $f \in D^m(k(a))$, $m \in \mathbb{N}$.

Ekkor:

1. $\exists \varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0 :\ f(a+h) = (T_{m,a}f)(a+h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^m$ $(h \in \mathbb{R}^n,\ a+h \in D_f)$, azaz $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - (T_{m,a}f)(a+h)}{\|h\|^m} = 0$;
2. Ha $G \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinom esetén $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - G(a+h)}{\|h\|^m} = 0$, akkor $G \equiv T_{m,a}f$.

53. Adja meg a kvadratikus alak definícióját.

Az $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ szimmetrikus mátrix által generált kvadratikus alak: $Q(\underline{h}) := Q(h_1, \ldots, h_n) := \langle A \cdot h, h \rangle = \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij} \cdot h_i \cdot h_j$.

<u>Kvadratikus alak osztályozása:</u>

A Q kvadratikus alak (vagy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix):

1. pozitív definit, ha $Q(h) > 0$ $(\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$;
2. pozitív szemidefinit, ha $Q(h) \geq 0$ $(\forall h \in \mathbb{R}^n)$;
3. negatív definit, ha $Q(h) < 0$ $(\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$;
4. negatív szemidefinit, ha $Q(h) \leq 0$ $(\forall h \in \mathbb{R}^n)$;
5. indefinit, ha $Q(h_1) > 0,\ Q(h_2) < 0$ $(\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n)$.

54. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak pozitív definit legyen? (Sylvester-kritérium.)

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A szimmetrikus, $Q(h) := \langle A \cdot h, h \rangle$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

$\Delta_k := \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \right)$ $k = 1, 2, \ldots, n$ (sarok-aldeterminánsok).

Ekkor:

1. $Q(A)$ pontosan akkor pozitív definit, ha minden k esetén $\Delta_k > 0$ $(1 \leq k \leq n)$;
2. $Q(A)$ pontosan akkor negatív definit, ha $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$, azaz $\forall k$-ra $sgn(\Delta_k) = (-1)^k$ (az előjelek váltakoznak).

55. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer arra vonatkozóan, hogy egy kvadratikus alak negatív definit legyen? (Sylvester-kritérium.)

Lásd az előzőt. Egy tételként tanultuk a pozitív és negatív definitségre vonatkozó Sylvester-kritériumot, nem akartam szétdarabolni a tételt.

56. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt.

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$, $f \in D\{a\}$. Ha f-nek az a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = \underline{0}$, azaz $(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a)) = (0, \ldots, 0)$.

57. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű elégséges feltételt.

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$ $f \in D^2\{a\}$, $f'(a) = 0$. Ha $f''(a)$ Hesse-mátrix:

1. pozitív definit, akkor a lokális minimumhely;
2. negatív definit, akkor a lokális maximumhely.

58. Fogalmazza meg az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvény lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű elégséges feltételt.

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in int\, D_f$ $f \in D^2\{a\}$, $f'(a) = 0$. Ha $f''(a)$ Hesse-mátrix:

1. pozitív definit, akkor a lokális minimumhely;
2. negatív definit, akkor a lokális maximumhely.

Hivatalos verzió hiányában ezt is behelyettesítettem az előző tételbe.

59. Fogalmazza meg a paraméteres integrálra vonatkozó tételt.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ($n \in \mathbb{N}$), $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum ($a, b \in \mathbb{R}$). Tegyük fel, hogy $f : U \times I \to \mathbb{R}$ folytonos és $\varphi(x) := \int_a^b f(x,t)dt$ ($x \in U$). Ekkor:

1. φ folytonos U-n;
2. Ha $\partial_i f$ parciális derivált létezik és folytonos $U \times I$-n, akkor $\exists \partial_i \varphi$ és ez folytonos, továbbá $\partial_i \varphi(x) = \int_a^b \partial_i f(x,t)dt$ ($x \in U$, $i = 1, 2, \ldots, n$)
   (Az integrálás és a deriválás sorrendje felcserélhető).

60. Definiálja az $\mathbb{R}^n$-beli intervallum fogalmát.

Legyen $I^j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum ($j \in \mathbb{N}$). Ekkor az $I := I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n$ $\mathbb{R}^n$-beli kompakt intervallum.

61. Mit jelent egy $\mathbb{R}^n$-beli intervallum felosztása?

Legyen $j = 1, 2, \ldots, n$; $\tau^j \in \mathcal{F}(I^j)$. A $\tau := \tau^1 \times \tau^2 \times \ldots \times \tau^n$ az $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum egy felosztása ($n \in \mathbb{N}$), az $\mathcal{F}(I)$ pedig az I-hez tartozó felosztások halmaza.

62. Mikor integrálható egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény?

Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény ($I \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) kompakt intervallum). Ekkor:

1. Az f függvény Darboux-féle alsó- és felső integrálja:
   (a) $I_* f := \sup\{s(f,\tau) \,|\tau \in \mathcal{F}(I)\}$;
   (b) $I^* f := \inf\{S(f,\tau) \,|\tau \in \mathcal{F}(I)\}$;
2. Az f függvény Riemann-integrálható I-n ($f \in R(I)$), ha $I_* f = I^* f = \int_I f$.

Megjegyzés: $\forall f : I_* f \leq I^* f$.

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt intervallum*, $n \in \mathbb{N}$) folytonos I-n, akkor $f \in R(I)$.

63. Adjon meg egy példát nem integrálható függvényre:

- $f(x,y) := \begin{cases} 1 & |x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & |egyébként \end{cases}$;
- $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.

Ekkor $\left.\begin{array}{l} I_* f = 0 \\ I^* f = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \notin R([0,1] \times [0,1])$.

64. Milyen állításokat ismer a határozott integrálra vonatkozó egyenlőtlenségekre?

Legyen $I \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ kompakt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f, g \in R(I)$. Ekkor:

1. $f \leq g \Longrightarrow \int_I f \leq \int_I g$ (az integrál az integrandusban monoton);
2. $|f| \in R(I) \Longrightarrow \left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$;
3. Ha $g \geq 0$ I-n és $m := \inf_I f$, $M := \sup_I f$, akkor $f \cdot g \in R(I)$ és $m \cdot \int_I g \leq \int_I f \cdot g \leq M \cdot \int_I g$ (középérték-tétel).

65. Hogyan lehet a határozott integrált kiszámolni egy $\mathbb{R}^2$-beli intervallumon?

Legyen $n = 2$, $I \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow I \subset \mathbb{R}^2$, $D_f := I = [a, b] \times [c, d]$, $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in R(I)$. Ekkor $\int\int_I f = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx\right) dy$.

Megjegyzés: az integrál felcserélhető.

66. Mit jelent az, hogy egy síkbeli halmaz x-re nézve normáltartomány?

Egy síkbeli H halmaz x-re nézve normáltartomány, ha $c(x) \leq d(x)$, $(x \in [a, b])$ adott folytonos függvények esetén $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,| a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}$.

67. Hogyan lehet kiszámolni egy kettős integrált normáltartományon?

Ha H halmaz x-re nézve normáltartomány, és $f : H \to \mathbb{R}$, $f \in R(H)$, akkor $\int\int_H f = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy\right) dx$.

68. Fogalmazza meg az integráltranszformációra vonatkozó tételt.

Legyen $\phi := (\phi_1, \phi_2) : U \to V$ $(U, V \subset \mathbb{R}^2)$ folytonos, deriválható bijekció, és tegyük fel, hogy $\det(\phi') \neq 0$ az U-n. Ha $f \in R(V)$, akkor $\int_V f = \int_U f \circ \phi \cdot |\det(\phi')|$. (Vessük össze $\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$-vel!)

Megjegyzés: a tétel jól használható, ha U normáltartomány.

II. rész

Írásbeli vizsgakérdések

1. tétel. *A Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség.*

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. *Ekkor* $\left|\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ *és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:*

- $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n = 0,\ a_k$ *tetszőleges,*
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}:\ a_k = \lambda b_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$,

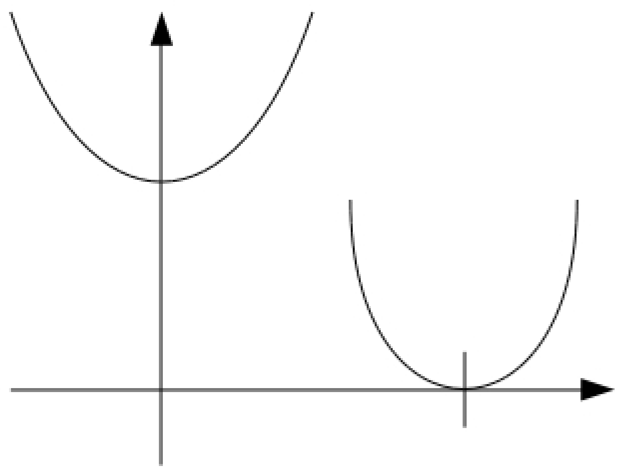
azaz $(a_1, \ldots, a_n)$ *és* $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *vektorok lineárisan összefüggők.*

Bizonyítás. Legyen $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

TRÜKK! Tekintsük a következő polinomot: $p(\lambda) := \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - \lambda b_k)^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right) \cdot \lambda^2 - 2\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$. Ekkor:

- $b_1 = \ldots = b_n = 0\ \surd$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} b_n^2 > 0 \Longrightarrow p(\lambda)$ másodfokú;

$p(\lambda) \geq 0\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})$.



$\Longrightarrow$ nincs 2 valós gyöke $\Longrightarrow$ diszkriminánsa:

$$\left(2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0 \Longleftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Az egyenlőség teljesül. □

2. tétel. $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ *metrikus tér.*

Az $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ *olyan metrikus tér, ahol* $\varrho_2(x, y) := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}\ (x, y \in \mathbb{R}^n)$, ϱ_2 *euklideszi metrika* $\mathbb{R}^n$*-en.*

Bizonyítás. A ϱ_2 metrika első három tulajdonsága triviális, csak az utolsó szorul részletezésre.

1. $\varrho_2(x, y) \geq 0\ \surd$
2. $\varrho_2(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y\ \surd$
3. $\varrho_2(x, y) = \varrho_2(y, x)\ \surd$

4. $\varrho_2(x,y) \le \varrho_2(x,z) + \varrho_2(z,y)$.

$$4 \Longleftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| \underbrace{x_k - y_k}_{a_k+b_k} \right|^2} \overset{?}{\le} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| \underbrace{x_k - z_k}_{a_k:=x_k-z_k} \right|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| \underbrace{z_k - y_k}_{b_k:=z_k-y_k} \right|^2} \Longleftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^2} \overset{?}{\le} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \overset{!}{\Longleftrightarrow}$$

$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \le 2 \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$. Ez igaz, mert a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenségből következik. $\square$

3. tétel. *Ekvivalens normák kapcsolata a konvergens sorozatokkal.*

Tegyük fel, hogy $(X, \|.\|_1)$, $(X, \|.\|_2)$ *normált tér és* $\|.\|_1$ *ekvivalens* $\|.\|_2$*vel (jelölésben:* $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$*). Ekkor az* $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ *sorozatra* $\lim(a_n) \overset{\|.\|_1}{=} \alpha \Longleftrightarrow \lim(a_n) \overset{\|.\|_2}{=} \alpha$ *(ekvivalens normák esetén ugyanazok a konvergens sorozatok).*

Bizonyítás. Legyen $m, M > 0$ $(m, M \in \mathbb{R})$. Ekkor $m \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M \cdot \|x\|_1$.

$\boxed{\Longrightarrow}$: tegyük fel, hogy $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_1} \alpha \Longrightarrow \|a_n - \alpha\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \|a_n - \alpha\|_2 \le M \cdot \|a_n - \alpha\|_1 \Longrightarrow \|a_n - \alpha\|_2 \to 0 \Longrightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_2} \alpha$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: hasonlóan. $\square$

4. tétel. $\mathbb{R}^n$*-ben az 1-es, a 2-es és a végtelen normák ekvivalenciája.*

Legyen $n = 2, 3, \ldots$. *Ekkor* $\mathbb{R}^n$*-ben:* $\|.\|_1 \sim \|.\|_2 \sim \|.\|_\infty$ *(azaz az 1-es, a 2-es és a végtelen normák ekvivalensek).*

Bizonyítás. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor:

- $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$;
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Igazoljuk, hogy $\|.\|_1 \sim \|.\|_\infty$. u.i. $\max_{k=1,\ldots,n} \{|x_k|\} \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \le n \cdot \max_{k=1,\ldots,n} \{|x_k|\}$.

Igazoljuk, hogy $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$. u.i. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot 1 \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt{n} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}}_{\substack{\| \\ \|x\|_2}} \Longrightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$.

Másrészt: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \overset{!}{\le} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1 \Longrightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$.

Kell még: $\|.\|_2 \sim \|.\|_\infty$. Ez triviális, ugyanis: $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n \cdot \|x\|_\infty$; $m \cdot \|x\|_\infty \le \|x\|_2$ hasonlóan igazolható. $\square$

5. tétel. $\mathbb{R}^n$*-beli sorozat konvergenciájának a koordinátasorozatokkal való kapcsolata.*

Tekintsük $\mathbb{R}^n$*-et, legyen* $\|.\|$ *egy tetszőleges norma,* $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $a_k = \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$*. Ekkor az* (a_k) *sorozat konvergens és* $\lim_{k\to+\infty}(a_k) \overset{\|.\|}{=} \alpha = \left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$ *akkor és csak akkor, ha* $\forall i = 1, 2, \ldots, n$*: az* $\underset{i-edik\ koordináta-sorozat}{\underset{\downarrow}{\left(a_k^{(i)}\right)_{k\in\mathbb{N}}}}$ *valós sorozat konvergens és* $\lim_{k\to+\infty}\left(a_k^{(i)}\right) = \alpha^{(i)}$.

Megjegyzés: $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergenciájának vizsgálata visszavezethető $\mathbb{R}$-beli sorozat konvergenciájának vizsgálatára.

Bizonyítás. $\boxed{\Longrightarrow}$: Legyen $i = 1, 2, \ldots, n$ rögzített. Ekkor $\underset{\downarrow \atop 0}{\left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right|} \leq \|a_k - \alpha\|_\infty \overset{\mathbb{R}^n-ben\ \forall\|.\|\ ekv.}{\leq} c \cdot \underset{\downarrow \atop {0 \atop k\to+\infty}}{\|a_k - \alpha\|}$ $(k \in \mathbb{N})$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: $\forall i = 1, 2, \ldots, n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists k_i \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_i\ (k \in \mathbb{N}) : \left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| < \varepsilon$ $\left(\alpha = (\alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(n)})\right)$; $k^* := \max\limits_{i=1,\ldots,n} k_i \Longrightarrow \forall k \geq k^* : \max\limits_{i=1,\ldots,n} \left|a_k^{(i)} - \alpha^{(i)}\right| = \|a_k - \alpha\|_\infty < \varepsilon \Longrightarrow \|a_k - \alpha\| \underset{a\ \|.\|-k\ ekv.}{\leq} c \cdot \|a_k - \alpha\|_\infty < \varepsilon \Longrightarrow \forall k \geq k^* : \|a_k - \alpha\| < \varepsilon \Longrightarrow a_k \underset{k\to+\infty}{\overset{\|.\|}{\longrightarrow}} \alpha$. □

6. tétel. *Normált terekben a konvergens és a Cauchy-sorozatok kapcsolata.*

Adott $(X, \|.\|)$ normált tér és $(a_n) : \mathbb{N} \to X$ sorozat. Ekkor:

1. *Ha (a_n) konvergens, akkor (a_n) Cauchy-sorozat;*
2. *Visszafelé a tétel nem igaz!*

Bizonyítás. $\boxed{1}$: Ha (a_n) konvergens, akkor $\exists \lim(a_n) =: \alpha \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N}) : \|a_n - \alpha\| < \varepsilon$. Ekkor: $\boxed{-\alpha + \alpha}$ $\|a_n - a_m\| \leq \|a_n - \alpha\| + \|a_m - \alpha\| < 2\varepsilon$ $(n, m \geq n_0)$, tehát (a_n) Cauchy-sorozat.

$\boxed{2}$: Igazolni kell, hogy: $\exists (X, \|.\|)$ normált tér és $\exists (a_n) : \mathbb{N} \to X$ Cauchy-sorozat, ami nem konvergens X-ben.

Példa: $(X, \|.\|) = (\mathbb{Q}, |.|)$ ($|.|$ a szokásos abszolút-érték). Legyen:

- $a_0 := 2$;
- $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Ekkor:

- (a_n) racionális sorozat $\subset (\mathbb{Q}, |.|)$;
- (a_n) Cauchy-sorozat $\mathbb{Q}$-ban;
- (a_n) nem konvergens $\mathbb{Q}$-ban, ugyanis $a_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

□

7. tétel. $\mathbb{R}^n$ *tetszőleges normával Banach-tér.*

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ (itt $\|.\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-ben). Ez a tér teljes normált tér, azaz Banach-tér.

Bizonyítás. $\mathbb{R}^n$-ben minden norma ekvivalens, így elég a $\|.\|_\infty$ normára igazolni!

Legyen $a_k = (a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ normált térben. Ekkor $\forall \varepsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k, l \geq k_0\ (k, l \in \mathbb{N}) : \|a_k - a_l\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \left|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\right| < \varepsilon$, emiatt $i = 1, 2, \ldots, n$ rögzített egészek esetén $(a_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, amiből az $\mathbb{R}$-beli Cauchy-kritérium alapján következik, hogy $(a_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens. Ekkor $\alpha^{(i)} := \lim\limits_{k\to+\infty} (a_k^{(i)})$ és $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =: \alpha \in \mathbb{R}^n$. Ekkor pedig $\|a_k - \alpha\|_\infty = \max\limits_{i=1}^{n} \left|a_k^{(i)} - \alpha_k^{(i)}\right| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

8. tétel. *A deriváltmátrix előállítására vonatkozó tétel.*

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$, $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *koordináta-függvények.*

Ha $f \in D\{a\}$, *akkor* $\forall j = 1, 2, \ldots, m$ *és* $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ *esetén a* $\partial_i f_j(a)$ *parciális deriváltak léteznek, és* $f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \cdots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *deriváltmátrix vagy Jacobi-mátrix.*

Bizonyítás. $f \in D\{a\} \Longrightarrow \exists A = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(f'(a) = A)$. Ekkor $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-A\cdot h\|^{(1)}}{\|h\|^{(2)}} = 0 \Longrightarrow \forall j = 1, 2, \ldots, m$ koordináta-függvényre: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\left|f_j(a+h)-f_j(a)-\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}\cdot h_k\right|}{\|h\|^{(2)}} = 0$. TRÜKK! Legyen $h := t \cdot e_i$ $(t \in \mathbb{R}) \Longrightarrow h = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow i.$

Ekkor $\lim\limits_{t\to 0} \frac{|f_j(a+te_i)-f_j(a)-a_{ji}\cdot t|}{|t|} = 0 \stackrel{!!}{\Longrightarrow} \exists \partial_i f_j(a)$ és ez $= a_{ji}$. □

9. tétel. *Az n-változós elsőfokú Taylor-polinom előállítása.*

Legyen $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Ekkor:*

1. $n = 2$ *(kétváltozós):* $i = (i_1, i_2)$, $|i| = i_1 + i_2 = 1$ $(= m)$, $h \in \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$i = (i_1, i_2)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$
$i!$	1	1
h^i	h_1	h_2
$\partial^i f = \partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2} f$	$\partial_1 f$	$\partial_2 f$

$|i| = 1$

$$\sum_{|i|=1} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i = \partial_1 f(a)\cdot h_1 + \partial_2 f(a) \cdot h_2 = \langle f'(a), h\rangle.$$

Ekkor: $(T_{1,a} f)(x) = (T_{1,a} f)(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle$ $(a + h \in D_f)$.

2. $n > 2$: $i = (i_1, \ldots, i_n)$, $m = 1 = |i| = i_1 + \ldots + i_n$, $i : (1, 0, \ldots, 0); (0, 1, \ldots, 0) \ldots (0, 0, \ldots, 1)$ *n darab* $\sum\limits_{|i|=1} \cdots$ *n-tagú. Ekkor:* $(T_{1,a} f)(x) = (T_{1,a} f)(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle$ $(f'(a) = (\partial_1 f(a),\ \partial_2 f(a),\ \ldots,\ \partial_n f(a)),\ h = (h_1, \ldots,\ h_n))$.

Bizonyítás. A tételben benne van. □

10. tétel. *A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.*

Tegyük fel, hogy:

1. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in int\, D_f$;
2. $[a, a+h] := \{a + t \cdot h \,|t \in [0, 1]\} \subset D_f$;
3. $f \in D^{m+1}([a, a+h])$, $m \in \mathbb{N}$.

Ekkor $\exists \nu \in [0, 1] :$ $f(a+h) = f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i\right)}_{(T_{m,a} f)(a+h)} + \underbrace{\sum_{|i|=m+1} \frac{\partial^i f(a+\nu h)}{i!} h^i}_{Lagrange-féle\ maradéktag}$.

Bizonyítás. Visszavezetés az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ esetre: $F(t) := f(a+th)$ $(t\in[0,1])$, $F\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F\in D^{m+1}$. Alkalmazzuk az 1-változós Taylor-formulát csak a 2 végpontra! Ekkor $\exists\nu\in[0,1]:\ F(1)=F(0)+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\cdot 1^k+\frac{F^{(m+1)}(\nu)}{(m+1)!}\cdot 1^{m+1}$.

A lényeg az, hogy $F^{(k)}(0)$ kiszámolható $\forall k\in\mathbb{N}$ esetén.

1. Lemma. $\frac{F^{(k)}(t)}{k!}=\sum\limits_{|i|=k}\frac{\partial^i f(a+t\cdot h)}{i!}h^i$ $(\forall t\in[0,1],\ k=1,2,\dots,m+1)$.

□

11. tétel. *A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.*

Legyen $f\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$, $a\in int\,D_f$, $f\in D\{a\}$. *Ha* f*-nek az* a*-ban lokális szélsőértéke van, akkor* $f'(a)=\underline{0}$, *azaz* $(\partial_1 f(a),\ \dots,\ \partial_n f(a))=(0,\ \dots,\ 0)$.

Bizonyítás. Triviális, ugyanis $\forall i=1,2,\dots,n:\ F:\ k(0)\ni t\mapsto f(a+t\cdot e_i)$ $(\in\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ függvénynek $t=0$-ban lokális szélsőértéke van, tehát $F'(0)=0=\partial_i f(a)$.

Megjegyzések:

- *Az 'a' a* $\left.\begin{array}{l}\partial_1 f(x)=0\\ \partial_2 f(x)=0\\ \vdots\\ \partial_n f(x)=0\end{array}\right\}$ *egyenletrendszer megoldása, és az egyenletrendszer megoldásai az* f *stacionárius pontjai, ahol lehetnek lokális szélsőértékek;*
- *Szükséges, de nem elégséges feltétel, pl.* x^3, $n=1$.

□

12. tétel. *A Sylvester-kritérium igazolása* $n=2$ *esetén.*

Legyen $A=\begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ *szimmetrikus mátrix,* $h\in\begin{bmatrix} h_1\\ h_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $Q(h)=\langle Ah,h\rangle=a\cdot h_1^2+2b\cdot h_1h_2+c\cdot h_2^2$. *Ekkor* $Q(A)$*:*

1. *pozitív definit* $\Longleftrightarrow$ $a>0,\ \det(A)>0$*;*
2. *negatív definit* $\Longleftrightarrow$ $a<0,\ \det(A)>0$*;*
3. *indefinit* $\Longleftrightarrow$ $\det(A)>0$ *(csak* $n=2$*-re!).*

Bizonyítás. $Q(h)=Q(h_1,h_2)=h_2^2\underbrace{\left(a\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2+2b\cdot\frac{h_1}{h_2}+c\right)}_{egyváltozós\ másodfokú\ polinom}$. Ekkor:

$\boxed{1}$: $a>0,\ 4b^2-4ac<0\Longleftrightarrow b^2-ac<0\Longleftrightarrow\det(A)>0$;

$\boxed{2{,}3}$: hasonlóan. □